

# 길이 호환적 극 부호를 위한 부호화 수열 기반 천공 기법

김 종 환\*, 최 연 준\*, 김 상 호<sup>o</sup>, 박 호 성\*\*

## A Coding-Sequence-Based Puncturing Scheme for Length-Compatible Polar Codes

Jong-Hwan Kim\*, Yeon Joon Choi\*, Sang-Hyo Kim<sup>o</sup>, Hosung Park\*\*

### 요 약

본 논문에서는 극부호의 부호율, 길이 호환성 지원을 위한 부호화 수열 기반 천공기법을 제안한다. 또한 모의실험을 통해 제안기법이 기존기법 대비 다양한 파라미터에서 우수한 오율 성능을 가짐을 보인다.

**Key Words** : Polar codes, partial order, compatibility, coding sequence, puncturing.

### ABSTRACT

In this paper, we propose a coding-sequence-based puncturing scheme to support the rate and length compatibility of polar codes. The simulation results show that the proposed scheme has better error performance than the existing puncturing schemes.

### I. 서 론

극부호(polar codes)는 이진 입력 이산 무기억 대칭 채널에 대해 낮은 복호 복잡도로 채널용량을 달성하는 최초의 오류정정부호이다<sup>[1]</sup>. 극부호는 짧은 부호길이에서 우수한 오율 성능을 가짐으로, 최근 3GPP 5G

표준의 컨트롤 채널을 위한 채널부호로 채택되었다<sup>[2]</sup>.

현재 표준에서는 극부호의 실용 기술로 단일 부호화 수열(coding sequence)을 이용한 극부호화 기술과 길이 호환성(compatibility) 지원을 위한 천공기법 등이 논의되고 있다. [1,3]에서 소개된 극부호화는 채널 양극화 현상을 기반으로 하는 반면, 표준에서는 분리 채널(I1)의  $W_N^{(i)}$ 의 신뢰도를 채널 용량과 관계없이 계산하여 극부호화 하였다<sup>[4]</sup>. 이 때 계산된 신뢰도를 기준으로 분리채널의 인덱스를 정렬할 수 있는데, 이 정렬된 인덱스 수열을 부호화 수열이라 지칭한다. 또한 극부호는 구조적 특성상 부호율 호환성을 지원하지 않지만, 부호길이는  $2 \times 2$  커널 행렬의 사용에 따라  $2^n$ 으로 제한되는 단점이 있다. 따라서 극부호의 길이 호환성을 위한 천공기법 역시 표준에서 논의되고 있다.

본 논문에서는 단일 부호화 수열을 사용하는 극부호를 고려하고, 부호율, 길이 호환성 지원을 위한 기존 천공기법에 대해 간략히 소개한다. 그리고 기존 천공기법보다 우수한 오율 성능을 갖는 부호화 수열 기반 천공기법을 제안한다.

### II. 극부호의 길이 호환성 지원을 위한 천공기법

본 장에서는 극부호화 및 표기법을 소개하고, 극부호를 위한 두 가지 천공기법인 ‘용량-0 천공’과 ‘용량-1 천공’에 대해 간략히 소개한다.

#### 2.1 표기법 정의 및 극부호화 소개

먼저 본 논문에서 사용할 표기법을 정의한다. 부호 길이  $N=2^n$ 에 대하여, 벡터  $(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 는  $a^N$ 으로 표기한다.  $q^N$ 은 극부호화 수열이며, 모든  $0 \leq i < j \leq N-1$ 에 대해  $q_i$ 는  $q_j$ 보다 신뢰도가 낮은 채널의 인덱스로 가정한다. 또한 벡터  $a^N$ 에 대해  $R(a^N)$ 을  $(a_{N-1}, a_{N-2}, \dots, a_0)$ 으로, 집합 안의 벡터  $\{a^N\}$ 는  $\{a_0, \dots, a_{N-1}\}$ 으로 정의한다. 그러므로,  $r^N = R(q^N)$ 에 대해 부호율  $R = K/N$ 인 극부호를 위한 정보집합은  $\{r^K\}$ 가 된다. 극부호어는 정보비트와 고정비트로 구성된  $u^N$ 에 대해,  $u^N G_N = x^N$ 으로 얻어

\* 본 연구는 방위사업청 및 국방과학연구소의 재원에 의해 설립된 신호정보 특화연구센터 사업의 지원을 받아 수행되었음.

• First Author : College of Information and Communication Engineering, Sungkyunkwan University, sas2323@skku.edu, 학생회원

◦ Corresponding Author : College of Information and Communication Engineering, Sungkyunkwan University, iamshkim@skku.edu, 종신회원

\* College of Information and Communication Engineering, Sungkyunkwan University, yeonjoon.ccl@gmail.com, 학생회원

\*\* School of Electronics and Computer Engineering, Chonnam National University, hpark1@jnu.ac.kr, 종신회원

논문번호 : KICS2017-09-237, Received September 5, 2017; Revised September 29, 2017; Accepted October 10, 2017

지고,  $G_N$ 은 Kronecker 거듭제곱  $\otimes^n$ 과  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  대해  $F^{\otimes n}$ 으로 정의되는 생성행렬이다<sup>[1]</sup>. 예를 들어,  $N=2, 4$ 에 대해  $u^N$ 와  $x^N$ 의 매핑 관계는 그림 1과 같다.

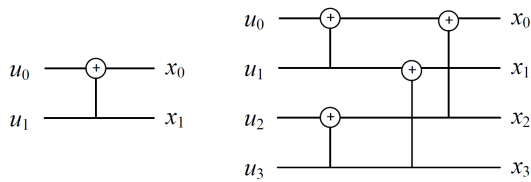


그림 1.  $N=2, 4$ 에 대한 극부호화 구조  
Fig. 1. Polar encoding structure for  $N=2, 4$

### 2.2 용량-0(Capacity-0, C0) 천공기법

용량-0 천공기법은 극부호화 이후, 일부 부호어 비트를 전송하지 않는 기법이다. 이 때 천공된 비트에 대응하는 채널의 용량은 0이므로 용량-0(C0) 천공으로 지칭한다. 극부호의 C0 천공에서는 천공비트 개수와 동일한 개수의 분리채널이 0-용량을 갖게 되는데, 그 채널들의 위치는 채널양극화에 따라 결정된다<sup>[5]</sup>. 예를 들어, 그림 1의  $N=2$ 에서  $x_0$  또는  $x_1$ 이 천공되면,  $u_0$ 에 대한 분리채널의 용량이 0이 되고,  $N=4$ 에서  $x_0$ 와  $x_2$ 가 천공되면,  $u_0$ 와  $u_2$ 에 대한 분리채널의 용량이 0이 된다. 이처럼 용량이 0이 되는 분리채널에 해당하는  $u_i$ 를 불능(incapable) 비트라 지칭한다. 결과적으로, 단일 부호화 수열을 이용한 극부호화를 할 때,  $P$ 개 비트를 C0 천공한다면,  $P$ 개의 불능비트를 먼저 고정비트로 설정한 후, 나머지  $N-P$ 개의  $u_i$  중  $K$ 개의 정보비트를 선택한다.

### 2.3 용량-1(Capacity-1, C1) 천공기법

용량-1 천공기법은 전체  $u^N$  중 일부  $u_i$ 를 0으로 단축(shortening)하여, 그와 관계있는 동일 개수의 부호어 비트들 또한 고정 값을 갖게 함으로, 해당 부호어 비트들을 전송하지 않는 기법이다<sup>[6]</sup>. 이 때 천공되는 비트를 고정 부호어 비트라 정의하며, 그 비트 값은 복호기도 아는 값이므로 용량-1(C1) 천공기법이라 지칭한다. 예를 들어  $N=2$ 에서  $u_1$ 을 0으로 단축하면,  $x_1$ 이 0으로 고정된다.  $N=4$ 에서는 먼저  $u_3$ 을 단축할 때  $x_3$ 이 0이 되고, 그 후  $u_1$  또는  $u_2$ 를 0으로 고정하면, 각각  $x_1$  또는  $x_2$ 가 고정되어, 단축 비트 개수와 동일한 개수의 비트를 천공할 수 있다. 결과적으로, 단일 부호화 수열을 이용한 극부호화를 할 때,  $P$ 개의

단축 비트를 먼저 고정비트로 설정하고, 나머지  $N-P$ 개의  $u_i$  중  $K$ 개의 정보비트를 선택한다.

## III. 부호화 수열을 이용한 극부호 천공기법

II장에서 설명한 C0, C1 천공을 하려면 천공 비트의 인덱스 순서인  $p^N$ 과 단축 비트의 인덱스 순서인  $s^N$ 이 필요하다. 표준에서는 C0 천공의  $p^N$ 으로 순차적(sequential) 순서  $v^N = (0, \dots, N-1)$ 과 비트역순(bit-reversal, BR)인  $w^N = (0, N/2, \dots, N-1)$ <sup>[11]</sup>, 그리고 단축의  $s^N$ 으로는  $R(v^N)$ 과  $R(w^N)$ 이 고려되고 있다.

본 장에서는 부호화 수열을 이용한 천공기법을 소개하고, 단일 부호화 수열로 C0, C1 천공을 효율적으로 할 수 있음을 증명한다. 그리고 모의실험을 통해 제안기법이 기존 천공기법보다 우수한 오류 성능을 가짐을 보인다.

### 3.1 부호화 수열 기반 천공기법

제안 천공기법을 소개하기 전, 임의의 채널 인덱스  $i$ 에 대한 두 개의 인덱스 집합  $A(i)$ 와  $B(i)$ 를 정의한다.

*Definition:* 채널 인덱스  $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$ 의  $n$ 비트 확장에 대한 비트단위 AND 연산을 '&'으로 표기할 때, 어떤  $i$ 에 대해  $i \& j = j$ 인 모든  $j$ 의 집합을  $A(i)$ ,  $i \& j = i$ 인 모든  $j$ 의 집합을  $B(i)$ 로 표기한다.

C0, C1 천공에 대한 불능비트, 고정 부호어 비트의 위치는 Lemma와 같은 특징이 있다.

*Lemma:* 어떤  $p^N$ 으로 C0 천공 할 때, 임의의  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ 에 대해,  $A(p_k) \subseteq \{p^k\}$ 이면,  $x_{p_k}$  천공에 의한 불능비트는  $u_{p_k}$ 이다. 또한 어떤  $s^N$ 으로 C1 천공 할 때,  $B(s_k) \subseteq \{s^k\}$ 이면,  $u_{s_k}$  단축에 의한 고정 부호어 비트는  $x_{s_k}$ 이다.

증명: C0 천공에서 임의의  $x_{p_k}$ 를 천공하면, 채널양극화에 따라  $j \in A(p_k)$ 인  $u_j$  또는  $u_{p_k}$ 가 불능이 된다. 만약  $A(p_k) \subseteq \{p^k\}$ 이면, 모든  $j \in A(p_k)$ 에 대한  $u_j$ 가 이미 불능이므로,  $x_{p_k}$  천공에 의한 불능 비트는  $u_{p_k}$

이다. 또한 임의의  $x_{s_k}$ 에 대해  $x_{s_k} = u_{s_k} + \sum_{j \in B(s_k)} u_j$ . 만약, C1 천공에서  $B(s_k) \subseteq \{s^k\}$ 이면,  $\sum_{j \in B(s_k)} u_j = 0$  이므로  $u_{s_k}$  단축에 의한 고정 부호어 비트는  $x_{s_k}$ 이다. □

본 논문에서는 최소한의 성능을 보장하는 부호화 수열  $q^N$ 을 고려하기 위해 [7]에서 정의된 부분순서 (partial order) 개념을 사용한다. 부분순서의 정의에 따라 채널  $j$ 가 채널  $i$ 보다 신뢰도가 높은 것을  $i < j$ 로 표기할 때, 다음과 같은 Theorem이 성립한다.

**Theorem:** 주어진  $q^N$ 은 모든  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ 와  $l \in \{0, \dots, k-1\}$ 에 대해  $q_k < q_l$ 이 아닌 수열이라 가정한다. 이 때, C0 천공에서  $p^N = q^N$ 이면, 불능비트의 순서는  $q^N$ 이고, C1 천공에서  $s^N = r^N$ 이면, 고정 부호어 비트 순서는  $r^N$ 이다.

증명: 집합  $A(\cdot)$ 의 정의에 따라, 임의의  $k$ 에 대한 모든  $i \in A(q_k)$ 는  $i \& q_k = i$ 이므로, 모든  $i$ 에 대해  $i < q_k$ 이다. 즉,  $q^N$ 의 조건에 따라  $A(q_k) \subseteq \{q^k\}$ 이므로 불능비트 순서는  $q^N$ 이다. 또한 집합  $B(\cdot)$ 의 정의에 따라, 모든  $i \in B(r_k)$ 는  $i \& r_k = r_k$ 이므로  $r_k < i$ 이다. 즉,  $B(r_k) \subseteq \{r^k\}$ 이므로 고정 부호어 비트 순서는  $r^N$ 이다.

결론적으로, Theorem에 따라 부호화 수열 하나로 C0, C1 천공 모두 가능하다.

### 3.2 기존 및 제안 천공기법의 성능평가

본 절에서는 부호화 수열 기반 천공기법의 성능 평가를 위해, 블록오율(block error rate, BLER) 0.1%를 위한 요구 SNR 성과와 SNR에 따른 BLER 성능을 제시한다. 모의실험 환경은 3GPP 표준을 참고하여  $K=16 \sim 200$ ,  $R=1/12 \sim 2/3$ 이고, AWGN 채널, QPSK를 사용하였다. 또한 최대 부호길이  $N_{max} = 1024$ 이며, 그 이상에 대해서는 천공 순서의 역순으로 반복전송(repetition)을 사용했다. 그리고 성능 최적화를 위해  $P/N \geq 0.4$ 인 경우,  $N/2$  길이에서 반복전송 하였다. 복호를 위해 리스트 크기가 8인 연속제거 리스트 복호를 사용하였고, 19비트의 CRC 부호를 연결했다<sup>[8]</sup>.

그림 2는 순차적 순서, 비트-역순, 제안기법에 대한 요구 SNR 성능 비교 결과이다. 성능 최적화를 위해, 순차적 천공은  $R=1/12 \sim 1/3$ 에서  $v^N$ 으로 C0 천공 하고,  $R=1/2, 2/3$ 에서 C1 천공하였다. 비트-역순 천공은  $R(w^N)$ 으로 모든 부호율에서 C1 천공 하였다. 제안기법의 경우는 순차적 천공과 동일하게 천공 하고, 모든 천공기법에 대한  $q^N$ 은 밀도진화를 통해 실험적으로 설계된 수열이다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 제안기법이 다른 기법들 대비 전반적으로 비슷하거나 우수한 성능을 보임을 확인 할 수 있다. 특히  $R=1/12$ 에서는 비트-역순으로 반복전송 할 때 성능

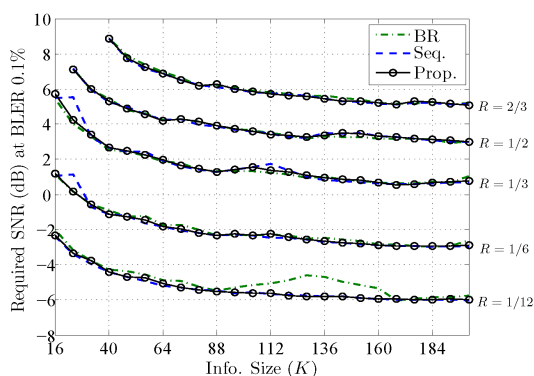


그림 2. 천공기법에 따른 블록 오율 0.1% 기준의 요구 SNR 성능 비교  
Fig. 2. Comparison of required SNR at BLER 0.1% for the different puncturing schemes

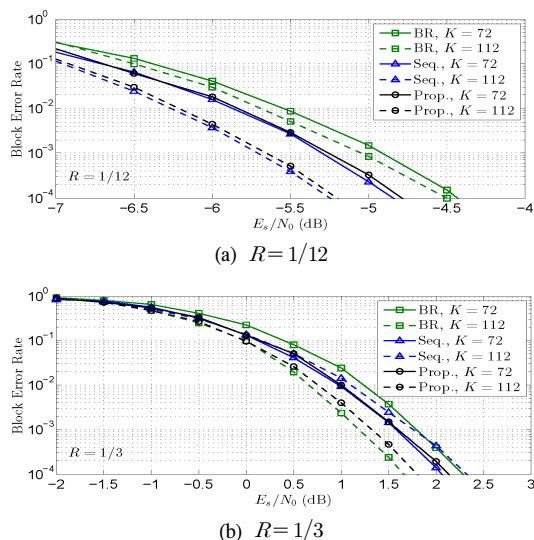


그림 3. 천공기법에 따른 블록 오율 성능 비교: (a)  $R=1/12$ , (b)  $R=1/3$   
Fig. 3. Comparison of BLER for the different puncturing schemes: (a)  $R=1/12$ , (b)  $R=1/3$

이 크게 요동하는 현상을 보이는데, 반복전송 비트 수가  $N_{\max}/2 = 512$ 에 가까울수록 성능 열화가 큼을 관찰하였다. 이러한 성능 요동은 비트-역순의 반복전송에 대한 채널 양극화와 부호화 수열 정의에 사용되는 채널 양극화의 경향이 크게 불일치하여 나타난다.

그림 3은  $R = 1/12$ 과  $R = 1/3$ 에서 SNR에 따른 BLER 성능 비교를 보여준다. 그림 3에서 볼 수 있듯이, 제안기법이 가장 우수한 오율 성능을 갖는 것은 아니지만, 다른 기법 대비 크게 열화되지 않는 안정적인 성능을 보임을 확인할 수 있다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 극부호의 부호율, 길이 호환성 지원을 위한 기존 천공기법을 소개하고, 극부호화를 위한 부호화 수열로 기존 기법보다 우수한 성능을 갖는 천공이 가능함을 확인하였다. 향후 제안기법 보다 낮은 구현 복잡도를 가지며, 우수한 오율 성능을 갖는 천공 순서에 대한 연구가 가능하다.

#### References

- [1] E. Arikan, "Channel polarization: a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3051-3073, Jul. 2009.
- [2] R1-1701552, *Final Report of 3GPP TSG RAN WG1 #87 v1.0.0*, Reno, USA, 14th-18th, Nov. 2016.
- [3] J.-H. Kim, J. W. Kang, and S.-H. Kim, "Performance and construction of polar codes with fixed code rate," *J. KICS*, vol. 36, no. 6, pp. 337-342, Jun. 2011.
- [4] R1-167209, *Polar code design and rate matching*, Huawei, 3GPP TSG RAN WG1 Meeting #86, Gothenburg, Sweden, 22nd-26th, Aug. 2016.
- [5] D.-M. Shin, S.-C. Lim, and K. Yang, "Design of length-compatible polar codes based on the reduction of polarizing matrices," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 61, no. 7, pp. 2593-2599, Jul. 2013.
- [6] W. Runxin and R. Liu, "A novel puncturing scheme for polar codes," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 18, no. 12, pp. 2081-2084, Dec. 2014.
- [7] C. Schurch, "A partial order for the synthesized channels of a polar code," in *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, pp. 220-224, Barcelona, Spain, Jul. 2016.
- [8] I. Tal and A. Vardy, "List decoding of polar codes," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 5, pp. 2213-2226, May 2015.