DBpia

논문 18-43-02-03 The Journal of Korean Institute of Communications and Information Sciences '18-02 Vol.43 No.02
https://doi.org/10.7840/kics.2018.43.2.227

키르크만 3중 시스템을 이용한 준최적 부분접속 복구 부호의 설계

이 현 지•, 박 호 성°

Construction of Near-Optimal Locally Repairable Codes Using Kirkman Triple Systems

Hyunjee Lee•, Hosung Park°

요 약

본 논문에서 키르크만 3중 시스템을 변형하여 가용도를 가지는 부분접속 복구 부호를 설계하는 방법을 제안한다. 제안하는 부호의 파라미터를 분석하고 잘 알려진 상계 관점에서 준최적임을 보인다.

Key Words : Availability, distributed storage system, locally repairable codes, Kirkman triple system

ABSTRACT

In this paper, we propose a construction method of locally repairable codes with availability by modifying a class of Kirkman triple systems. The constructible parameters of the proposed codes are analyzed and it is shown that the proposed codes are near-optimal with respect to a well-known bound.

Ⅰ. 서 론

모바일, IoT 등 다양한 애플리케이션에서 발생하는 데이터의 양이 기하급수적으로 증가함에 따라 이를 저장하기 위한 데이터센터 역시 규모 및 개수 측면에서 빠르게 증가하고 있다. 이에 따라 효율적으로 데이터를 저장하는 기술[1]은 매우 중요해지고 있으며, 현재 핫 데이터 (hot data)를 위한 복제 기반 분산 저장 기술과 콜드 데이터 (cold data)를 위한 소실 부호 (erasure code) 기반 분산 저장 기술으로 구분되어 발전하고 있다.

특히 노드가 손실되었을 때 작은 수의 노드들에 접속함으로써 복구를 가능하게 하는 부분접속 복구 부호[2]가 제안되어 수 차례 실제 시스템에 적용이 실행/검토되었으며, 향후 본격적인 활용을 위해 다양한 부분접속 복구 부호들이 연구되고 있다. 데이터에 읽고자 하는 요청이 빈번하게 발생하는 경우를 대비하여 가용도를 지원하는 부분접속 복구 부호도 활발히 연구되고 있다[3].

본 논문에서는 키르크만 3중 시스템[4]을 이용하여 정보 데이터의 가용도가 3인 새로운 부분접속 복구 부호의 설계 방법을 제안한다. 기존 부호[3]와는 달리 일부 패리티 데이터의 가용도를 지원하여 취약한 패리티 노드들이 존재할 때 유용하며, 제안하는 부호는 싱글턴 파생 상계[3] 관점에서 준최적임을 보인다.

Ⅱ. 부분접속 복구 부호

C를 길이 n, 차원 k, 최소 해밍 거리 d인 $[n,k,d]$ 선형 부호라고 하자. 그리고 $[n]=\{0,1,\ldots,n-1\}$으로 정의하고, 각 부호어를 $c=(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})$으로 표기하자. 다음의 성질들을 만족할 때 부호 심볼 c_i는 (r,t)-부분접속성을 가진다고 한다 [3].

1) c_i가 집합 $\Phi_j(i)$, $j\in[t]$에 해당하는 인덱스를 가지는 부호 심볼들로부터 복구되도록 하는 t개의 집합들 $\Phi_0(i),\ldots,\Phi_{t-1}(i)\subset[n]\backslash\{i\}$이 존재한다.
2) 모든 $j\in[t]$에 대하여 $|\Phi_j(i)|\le r$
3) 모든 $j\neq l\in[t]$에 대하여 $\Phi_j(i)\cap\Phi_l(i)=\varnothing$

본 논문에서는 모든 k개의 정보 심볼들에 대하여 (r,t)-부분접속성을 만족할 때 C를 (n,k,r,t)-부분접속 복구 부호라고 부르기로 한다.

부분접속 복구 부호의 파라미터들 사이에는 균형관계가 존재하는데, 이를 잘 표현하는 싱글턴 상계와 같은 방법으로 유도된 d에 대한 상계 부등식은 다음과

※ 본 연구는 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업이며 (No. NRF-2015R1D1A1A01060941), 또한 2016년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음
• First Author : Department of LG Smart Hybrid Engineering, Chonnam National University, hglee0306@naver.com, 학생회원
° Corresponding Author : (ORCID:0000-0001-7854-7792)School of Electronics and Computer Engineering, Chonnam National University, hpark1@jnu.ac.kr, 종신회원
논문번호 : KICS2018-01-009, Received January 7, 2018; Revised January 12, 2018; Accepted January 12, 2018

www.dbpia.co.kr

같다[3].

$$d \le n-k-\left\lceil \frac{kt}{r} \right\rceil + t + 1$$

본 논문에서는 위의 싱글턴 파생 상계의 등호를 만족할 때 부분접속 복구 부호를 최적이라고 부른다.

Ⅲ. 키르크만 3중 시스템을 이용한 부분접속 복구 부호의 설계

키르크만 3중 시스템을 정의하기에 앞서 먼저 $t-(v,\kappa,\lambda)$ 디자인 및 스테이너 시스템을 정의한다.

정의 1. $t-(v,\kappa,\lambda)$ 디자인은 (V,B) 순서쌍으로서 V는 v개의 점으로 이루어진 집합이고, B는 κ개의 원소를 가지는 V의 부분집합들(블록)의 집합이며, V의 모든 크기 t인 부분집합들은 B에 정확히 λ번 포함되어 있는 성질을 가진다. 스테이너 시스템 $S(t,\kappa,v)$는 $\lambda=1$인 $t-(v,\kappa,\lambda)$ 디자인이다.

$t=2$, $\kappa=3$인 스테이너 시스템을 스테이너 3중 시스템이라고 부르며, $STS(v)$로 표시한다. [4]에 따르면 스테이너 3중 시스템은 $v\equiv 1,3 \pmod 6$ 에 대해서만 존재한다.

정의 2. $v \equiv 3 \pmod 6$ 에 대한 $STS(v)$를 키르크만 3중 시스템으로 정의하며, $KTS(v)$로 표기한다.

키르크만 3중 시스템에서 전체 블록의 개수를 b라 하고, 하나의 점이 포함되어 있는 블록의 수를 ρ라고 하자. 키르크만 3중 시스템을 집합이 아닌 행렬 형태로도 정의할 수 있는데, 각 행들은 V의 점들을 의미하고 각 열들은 B의 블록들을 의미하며 점 i $(0 \le i < v)$가 블록 $j(0 \le j < b)$에 포함되면 행렬의 (i,j)원소는 1, 그렇지 않으면 0이 된다. 이러한 행렬을 접속 행렬이라 부르며 크기는 $v \times b$, 열가중치는 $\kappa(=3)$, 행가중치는 ρ가 된다. 그리고 파라미터 간에는 다음 관계를 가진다.

$$b = v(v-1)/6,\ \rho = (v-1)/2$$

한편 여러 개의 블록들이 집합 V를 정확히 분할할 때 해당 블록들은 하나의 병렬 급이라고 한다. $t-(v,\kappa,\lambda)$ 디자인이 모두 병렬 급으로 분할될 수 있으면 분해 가능하다고 불린다. $KTS(v)$는 분해 가능하며 $v/3$개의 블록이 모여서 하나의 병렬 급을 이루고, $KTS(v)$에는 전체 $(v-1)/2$개의 병렬 급들이 존재한다.

$KTS(v)$를 부분접속 복구 부호의 패리티 체크 행렬으로 사용하는 경우 2개의 노드가 공통으로 갖게 되는 심볼의 수는 항상 1인 특성이 있기 때문에 가용도를 가지는 부분접속 복구 부호의 설계에 적합하다. 본 논문에서는 $v \equiv 9 \pmod{18}$ 인 $KTS(v)$를 변형하함으로써 부분접속 복구 부호를 설계하는데, 수학적 원리에 기반하여 변형하더라도 2개의 노드가 공통으로 갖게 되는 심볼의 수가 최대 1이 되도록 한다. $KTS(v)$의 접속 행렬을 변형하여 최종적으로 부분접속 복구 부호의 패리티 체크 행렬을 설계하고자 하며, 설계 방법은 다음과 같다.

1. $KTS(v)$의 블록들을 병렬 급별로 정렬하며 첫 번째 병렬 급은 $\{0,1,2\},...,\{v-3,v-2,v-1\}$, 두 번째 병렬 급은 $\{0,v/3,2v/3\},...,\{v/3-1,2v/3-1,v-1\}$이 되도록 접속 행렬의 행과 열의 순서를 정렬한다.
2. 부분접속 복구 부호의 패리티 부분 설계를 위해서 $v \times v$ 단위 행렬을 가정하자. 단위 행렬의 열의 인덱스가 3의 배수인 열들을 차례로 $KTS(v)$의 첫 번째 병렬 급에 해당하는 열들로 치환하고 $KTS(v)$의 접속 행렬에서 첫 번째 병렬 급을 삭제한다.
3. $KTS(v)$의 두 번째 병렬 급에서 열 인덱스의 3으로 나눈 나머지가 1, 2인 열들을 삭제한다.
4. 남아 있는 $KTS(v)$의 접속 행렬과 변형된 단위 행렬을 연결하면 제안하는 부분접속 복구 부호의 패리티 체크 행렬이 된다.

위 설계 방법에 따른 부분접속 복구 부호의 파라미터는 다음과 같다.

$$n = v(3v+5)/18,\ k = v(3v-13)/18,$$
$$r = (v-3)/2,\ t = 3$$

설계 방법의 이해를 돕기 위해 $KTS(9)$를 이용하여 $n=16$, $k=7$, $r=3$, $t=3$인 부분접속 복구 부호를 설계하는 과정을 설명한다. 아래 행렬은 $KTS(9)$의 접속 행렬이다.

1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0

www.dbpia.co.kr

병렬 급 순으로 정렬하고 설계과정 1과 같이 첫 번째 및 두 번째 병렬 급에 대하여 정렬하고 나면 접속 행렬은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0
\end{array}\right]$$

첫 번째 병렬 급을 삭제하고 두 번째 병렬 급에서 삭제될 첫 번째 및 두 번째 열을 표시한 행렬은 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&1&0&0
\end{array}\right]$$

마지막으로 설계과정 3과 4와 같이 변형된 접속 행렬과 변형된 단위행렬을 연결한 최종 행렬은 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccccc}
1&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right]$$

제안하는 부호가 싱글턴 파생 상계 관점에서 얼마나 잘 설계되었는가를 알아보기 위해 싱글턴 파생 상계의 우변을 $\delta = n - k - \lceil kt/r \rceil + t + 1$로 정의하자. 제안하는 부호의 파라미터들을 대입하여 δ를 구하면 다음과 같다.

$$\delta = \begin{cases} 6, & v = 9 \\ 5, & \text{otherwise} \end{cases}$$

그리고 정보 부분의 하나의 열과 선형 종속을 이루는 패리티 부분의 가중치 1인 3개의 열을 찾을 수 없고, 가중치 3인 열들끼리는 동시에 1을 2개 이상 공유하지 않기 때문에[5] 제안하는 부호의 최소 해밍 거리는 4 이상이다. 모의 실험을 통하여 $v = 9$인 경우 제안하는 부호의 최소 해밍 거리는 6이 됨을 확인하였고, 나머지 경우에는 d와 δ의 차이가 최대 1이 되므로 제안하는 부호는 싱글턴 파생 상계 관점에서 준최적이 된다.

[3]에서 제안한 부호들은 패리티 부분의 가용도가 모두 1인 것에 비해 제안하는 부호는 패리티 부분 중 1/3에 해당하는 열들의 가용도가 3이 된다. 이는 싱글턴 파생 상계 관점에서의 성능을 약간 희생함으로써 얻게 되는 성질로 이해할 수 있다. 이러한 성질은 패리티 부분에 취약한 노드들이 있는 경우 해당 열들을 대응시켜서 시스템을 운영하면 패리티 부분의 복구 및 데이터 전송에서 더 좋은 성능을 보이게 된다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 $v \equiv 9 \pmod{18}$에 대하여 $KTS(v)$를 이용하여 $n = v(3v+5)/18$, $k = v(3v-13)/18$, $r = (v-3)/2$, $t = 3$인 부분접속 복구 부호를 설계하였다. 제안하는 부호는 싱글턴 파생 상계 관점에서 준최적이며, 패리티 부분 중 1/3에 해당하는 열들의 가용도가 3이어서 패리티 부분에 취약한 노드들이 존재할 경우에 장점을 보일 수 있다.

References

[1] H. Park and C.-S. Kim, "Distributed storage codes with multiple replication degrees using relative difference families," *J. KICS*, vol. 41, no. 12, pp. 1768-1770, Dec. 2016.

[2] P. Gopalan, C. Huang, H. Simitci, and S. Yekhanin, "On the locality of codeword symbols," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 58, no. 11, pp. 6925-6934, Nov. 2012.

[3] J. Hao and S. Xia, "Constructions of optimal binary locally repairable codes with multiple repair groups," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 20, no. 6, pp. 1060-1063, Jun. 2016.

[4] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, *Handbook of Combinatorial Designs,* 2nd Ed., Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[5] S. J. Johnson and S. R. Weller, "Regular low-density parity-check codes from combinatorial designs," in *Proc. Inf. Theory Wksp.*, pp. 90-92, Australia, Sept. 2001.

www.dbpia.co.kr