

# 직교주파수분할다중화 시스템에서 저 복잡도의 구멍 뚫린 커널 기반 직교 매칭 퍼슈트에 의한 압축 채널 센싱

김기훈\*, 장민호°

## Compressed Channel Sensing by Low-Complexity Punctured Kernel-Based OMP in OFDM Systems

Kee-Hoon Kim\*, Min-Ho Jang°

### 요약

본 논문은 압축 센싱 (compressed sensing) 기법을 이용하여 OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) 시스템에서 채널을 추정 또는 센싱하는 경우 흔히 사용되는 OMP (orthogonal matching pursuit)의 복잡도를 감소시키는 방법을 제안한다. OMP는 특정한 커널 함수를 여러 번 더하는 연산으로 등가적으로 수행될 수 있는데, 이 커널의 작은 크기의 원소들을 0으로 만들어 (puncturing) 계산 복잡도를 감소시키는 방법을 제안한다.

**Key Words** : Channel estimation, compressed sensing, kernel, OFDM (orthogonal frequency division multiplexing), OMP (orthogonal matching pursuit), puncturing

### ABSTRACT

This paper presents the method of reducing the computational complexity of compressed channel sensing in OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) systems, where OMP (orthogonal matching pursuit) is frequently used. Thus, we can

reduce its computational complexity by puncturing a kernel function used in kernel-based OMP.

### I. 서론

최근 광대역 OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) 시스템에서 채널 임펄스 응답 (impulse response)의 원소의 크기가 대부분 0 이라는 신호의 희소성 (sparse) 특징을 활용하여 압축 채널 센싱 (compressed channel sensing)을 적용하는 방법에 대한 다양한 연구가 진행되고 있다<sup>1,2</sup>. OFDM 시스템에서 압축 채널 센싱 문제는 부분 푸리에 행렬 (partial Fourier matrix)을 센싱 행렬 (sensing matrix)로 갖고 수신된 파일럿 심볼 (pilot symbol)로부터 채널 임펄스 응답을 복원하는 것으로 생각할 수 있다. 이를 위해 OMP (orthogonal matching pursuit) 알고리즘이 자주 쓰인다<sup>3</sup>.

한편, [4]에서는 위의 OMP의 센싱 행렬이 부분 푸리에 행렬인 경우에 대해서는 커널 함수를 활용하는 알고리즘으로 등가적으로 변형될 수 있음이 알려졌다. 즉, 원래의 OMP는 복원하고자 하는 신호에서 0이 아닌 부분을 찾는 방법으로 행렬과 벡터의 곱을 활용하는데, [4]에서는 특정한 커널을 가지고 이를 더하고 빼는 것을 사용한다. 이는 기존의 OMP와 비교 시 수식적으로 완벽히 등가이며, 따라서 동일한 복원 성능과 낮은 계산 복잡도를 갖는다.

[4]의 커널 기반 OMP에서 쓰이는 커널은 원소들의 크기의 분산이 매우 큰 형태를 갖는다. 따라서 커널들의 원소 중 그 크기가 매우 작은 원소들을 0으로 구멍 뚫어 (puncturing) 계산량을 더욱 더 줄일 수 있게 된다. 본 논문에서 제안하는 구멍 뚫린 커널 기반 OMP 방법은 기존의 OMP (또는 커널 기반 OMP)에 비해 채널 추정의 정확도는 조금 감소하지만 계산 복잡도를 감소시킬 수 있는 장점을 갖는다.

### II. OFDM 시스템에서 압축 채널 센싱

OFDM 시스템에서 주파수 축 상에서  $N$ 개의 입력 심볼 중에서  $M$ 개의 파일럿 심볼들이 있다고 가정하자. 단순화를 위해 AWGN (additional white Gaussian noise)는 무시하기로 한다. 이 경우 채널 추정을 위한

\* 본 연구는 2016년 울산과학기술대학교 교내학술연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

• First Author : (ORCID:0000-0002-0438-8036)Department of Electronic Engineering, Soonchunhyang University, keehk85@gmail.com, 종신회원

° Corresponding Author : (ORCID:0000-0001-9195-5184)School of Electrical and Electronic Engineering, Ulsan College, mhjang@uc.ac.kr, 종신회원  
 논문번호 : KICS2018-01-003, Received January 3, 2018; Revised January 29, 2018; Accepted February 7, 2018

시스템 모델링은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$SY = S \text{diag}(X) Fh \quad (1)$$

여기서  $h$ 는  $N$ 차원의 채널 임펄스 응답이다. 광대역 주파수 대역을 사용하는 경우,  $h$ 는 0이 아닌 원소의 개수  $K$ 가 매우 적게 되고 이를 “희소성이 있다”고 한다.  $F$ 는  $N \times N$  차원의 푸리에 행렬 (Fourier matrix)을,  $X$ 는 주파수 축 상에서  $N$ 차원의 입력 심볼 시퀀스를,  $\text{diag}(X)$ 는  $X$ 를 대각선화 시킨  $N \times N$  차원의 행렬이다.  $Y$ 는  $N$ 차원의 수신된 심볼 시퀀스를,  $S$ 는 행 선택 행렬 (row selection matrix)로써 수신 심볼 시퀀스  $Y$ 에서 파일럿 심볼들의 색인 집합에 해당하는 행들만을 선택하는 행렬이다. 따라서,  $SY$ 는  $M$ 차원이고 파일럿 심볼들만의 벡터가 된다. 간단하게 파일럿 심볼들의 값을 1이라고 놓으면 수식 (1)에서  $S \text{diag}(X)F$ 는  $SF$ , 즉, 부분 푸리에 행렬로 단순화 되어 다음 식을 얻는다.

$$SY = SFh \quad (2)$$

수식 (2)에서  $SY$ 는  $M$ 차원의 측정 벡터가 되고  $h$ 는  $N$ 차원의 벡터이고, 이 두 벡터는 센싱 행렬  $SF$ 로 선형 연관되어 있다. 우리의 목적은  $SY$ 로부터  $h$ 를 복원하는 것이지만,  $h$ 의 차원이  $SY$ 의 차원보다 더 크기 때문에  $SY$ 로부터  $h$ 를 완벽하게 복원하기는 일반적으로는 힘들다. 하지만  $h$ 의 원소가 대부분 0이고 (sparse) 센싱 행렬  $SF$ 의 구조가 적절하다면, 이 복원이 가능함이 알려져 있다<sup>[1]</sup>. 이러한 압축 센싱 복원을 위한 알고리즘들은 여러 가지가 있다.

그 중 가장 흔히 쓰이는 알고리즘으로 OMP가 있다<sup>[3]</sup>. OMP는 센싱 행렬  $SF$ 와 측정 벡터  $SY$ 의 행렬 곱이 필요하다. 이는 계산 복잡도가 높기 때문에 [4]에서는 기존의 OMP와 성능은 완전히 동일하면서 (수식적으로 완벽히 동가이면서) 복잡도를 낮추는 커널 기반 OMP를 제안하였다.

### III. 제안하는 구멍 뚫린 커널 기반 OMP 알고리즘

커널 기반 OMP는 총  $K$ 번 반복하는데 각 단계마다 상관 벡터 (correlation vector)를 만든다<sup>[4]</sup>. 이 연산이 OMP에서 가장 계산 복잡도가 크므로 보통 계산 복잡도를 논의할 때 이 상관 벡터 생성 계산 복잡도만 생각한다<sup>[3]</sup>.  $k$ 번째 단계의 상관 벡터  $c_k$ 는 다음과 같은 연산을 통해 만든다<sup>[4]</sup>.

$$c_k = c_1 - \sum_{\tau=1}^{k-1} \alpha_{\tau} \langle v \rangle_{\beta_{\tau}}, k > 1 \quad (3)$$

여기서  $c_1$ 은 첫 번째 단계의 상관 벡터로  $c_1 = (SF)^H SY$ 로 만들어진다. 그리고  $\alpha_{\tau}$ 는 적절한 복소수 계수 (coefficient)이고  $\beta_{\tau}$ 는 적절한 실수이다. 또한  $\langle v \rangle_{\beta_{\tau}}$ 는 커널 (kernel)이라 불리는  $v$ 라는 벡터를  $\beta_{\tau}$ 만큼 순환 이동 (circular shift)시킨 벡터이다. 다시 말해, 수식 (3)에 따르면  $c_k$ 는  $c_1$ 에다가 커널  $v$ 를 적절히  $\alpha_{\tau}$ 배 해주고,  $\beta_{\tau}$ 만큼 순환 이동을  $k-1$ 번 해주어야 생성할 수 있다. 여기서  $\alpha_{\tau}$ ,  $\beta_{\tau}$ 는 본 논문에서는 그리 중요하지 않으므로 자세한 설명은 생략한다 (자세한 수식은 [4]를 참조). 커널  $v$ 는  $v = F^H S^T S^1 T^0$ 로 생성될 수 있다<sup>[4]</sup>.

이제 커널 기반 OMP의 복잡도를 더욱 더 줄이기 위해 커널 벡터  $v$ 에 구멍을 뚫는다. 즉,  $v$ 에서 크기가 일정 임계치 (threshold)가 되지 않는 원소들을 0으로 만들어주고 이를 구멍 뚫린 벡터 (punctured vector)  $\tilde{v}$ 라고 한다. 이를 이용하여 수식 (3)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$c_k = c_1 - \sum_{\tau=1}^{k-1} \alpha_{\tau} \langle \tilde{v} \rangle_{\beta_{\tau}}, k > 1 \quad (4)$$

이 연산에서  $\tilde{v}$ 는 구멍이 뚫려 여러 원소들이 0이 되기 때문에 수식 (4)의 계산 복잡도는 수식 (3)에 비하여 많이 감소가 된다. 하지만 이렇게 하면 너무 많은 성능 열화가 될 수 있기에 수식 (3)과 수식 (4)를 적절히 융합하여 다음 수식을 제안한다.

$$c_k = c_1 - \sum_{\tau=1}^{k-2} \alpha_{\tau} \langle \tilde{v} \rangle_{\beta_{\tau}} - \alpha_{k-1} \langle v \rangle_{\beta_{k-1}}, k > 1 \quad (5)$$

이 식에서는  $\tau=1$ 부터  $k-2$ 까지의 연산에는 구멍 뚫린 커널 벡터  $\tilde{v}$ 를 이용하였고, 새롭게 추가되는 0이 아닌 원소인  $\tau=k-1$ 인 경우에는 원래의 커널  $v$ 를 사용함으로써 성능 열화를 일정 부분 방지하였다.

### IV. 모의실험 및 결론

채널 임펄스 응답  $h$ 는  $K$ 개의 0이 아닌 값을 갖는  $N$ 차원의 벡터이다. 0이 아닌 값은 실수 값과 허수 값을  $U[0,1]$ 로 발생시켰다.  $N=4096$ ,  $M=63$ 으로 설

정하였다. 즉, 센싱 행렬  $SF$ 는  $63 \times 4096$  차원의 행렬이 되며, 파일럿 심볼 벡터  $SY$ 의 길이는 63이 된다. 압축 채널 센싱을 하였을 때, 기존의 OMP와 제안하는 구멍 뚫린 커널 기반 OMP의 정확 복원 확률(ERP: exact recovery probability)을  $K$ 가 변함에 따라 그림 1에 도시하였다. 정확 복원이란 추정된 채널 임펄스 응답을  $\hat{h}$ 라 하였을 때  $\|h - \hat{h}\|_2 / \|h\|_2 < 10^{-6}$ 인 경우를 의미한다. 여기서  $\|\cdot\|_2$ 는  $l_2$ -norm을 의미한다. 수신단에서는  $K$ 를 알지 못하고, 압축 채널 센싱은 큰 원소부터 차례로 복원한다는 사실을 이용하여 최근 복원된 원소의 크기가 0.1 이하인 경우 복원을 멈추었다.

그림 1에서 검정색 그래프 (THS0.000)는 기존의 커널 기반 OMP를 사용하였을 때의 정확 복원 확률을 나타내고, 나머지는 임계치 (THS) 값을 달리 하면서 제안하는 구멍 뚫린 커널 기반 OMP를 사용하였을 때의 정확 복원 확률을 나타낸다. 예로, 파란색 그래프에서는 임계치 값을 0.0015 만큼 주어 커널  $v$ 에서 이보다 작은 크기의 원소 총 1140개를 모두 0으로 만들었다 (puncturing). 커널  $v$ 에 구멍이 뚫린 만큼 기존의 커널 기반 OMP에 비해 성능 열화가 생기지만 만약 우리가  $K$ 를 8 이하의 값을 고려하는 채널 추정인 경우에는 성능차이는 크게 존재하지 않는다.

3GPP에서 많이 쓰이는 Pedestrian-B channel을 이용하여 모의실험도 수행하였다. 그 결과 임계치를 0.003, 0.002, 0.0015, 0.001, 0으로 하여 실험한 결과 NMSE (normalized mean square error)는 각각 0.00195, 0.00192, 나머지는 0에 근사한 값이 나왔다. 즉, 0.0015보다 낮은 임계치는 모두 동일하게

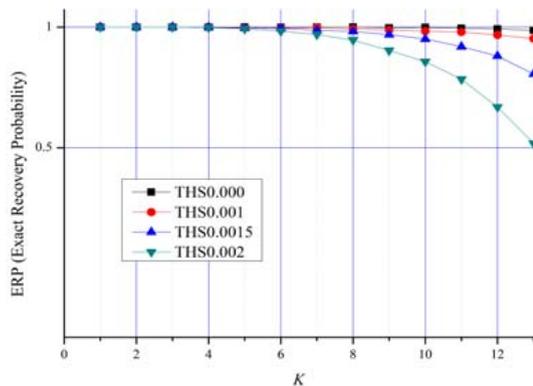


그림 1. 압축 채널 센싱에서 기존의 OMP와 제안하는 구멍 뚫린 커널 기반 OMP 알고리즘의 정확 복원 확률 비교  
Fig. 1. ERPs of the conventional OMP and the proposed punctured kernel-based OMP

Pedestrian-B channel을 잘 복원하였다.

이제 계산 복잡도를 비교해보자. 기존의 커널 기반 OMP는 수식 (3)을 이용하여 연산을 수행한다. 여기서  $v$ 는 4096 길이의 벡터이다. 수식 (3)을 위한 계산량을 생각해보면 만약  $c_1$ 이 이미 만들어져있다고 가정하면 그 뒤의 두 번째 항을 계산하는 데에 4096 길이의 벡터  $v$ 에 대한 계수 곱과 뺄셈을 총  $k-1$ 번 해주어야 한다. 이제 제안하는 구멍 뚫린 커널 기반 OMP (임계치 0.0015 기준)는 수식 (5)을 이용하여 연산을 수행한다. 여기서  $v$ 는 4096 길이의 벡터이고,  $\tilde{v}$ 는 구멍 뚫린 1140개의 원소가 0인 (2956개의 원소가 0이 아닌) 벡터이다. 앞 상황과 공통으로  $c_1$ 이 이미 만들어져있다고 가정하면 그 뒤의 두 번째 항을 계산하는 데에 2956개의 0이 아닌 원소의 벡터에 대한 계수 곱과 뺄셈을 총  $k-2$ 번 해주고, 4096 길이의 벡터  $v$ 에 대한 계수 곱과 뺄셈을 추가로 한 번 해주면 된다. 예를 들어  $k=8$ 인 상황에서는 기존의 커널 기반 OMP는  $4096 \times 7 = 28672$  번의 계수 곱과 뺄셈을 해주어야 하고, 제안하는 구멍 뚫린 커널 기반 OMP는 24% 감소된  $2956 \times 6 + 4096 = 21832$  번의 계수 곱과 뺄셈을 해주면 된다.

References

- [1] W. U. Bajwa, J. Haupt, A. M. Sayeed, and R. Nowak, "Compressed channel sensing: A new approach to estimating sparse multipath channels," in *Proc. IEEE*, vol. 98, pp. 1058-1076, Jun. 2010.
- [2] M.-H. Jang and K.-H. Kim, "Pilot tone design for PAPR reduction in OFDM systems based on compressed channel sensing," *J. KICS*, vol. 40, no. 5, pp. 806-808, May 2015.
- [3] J. A. Tropp and A. C. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4655-4666, Dec. 2007.
- [4] K.-H. Kim, H. Park, S. Hong, and J.-S. No, "Fast correlation method for partial Fourier and Hadamard sensing matrices in matching pursuit algorithms," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E97-A, no. 8, pp. 1674-1679, Aug. 2014.