

이진 극 부호를 위한 16-QAM 성상도 최적화

이 아 립*, 강 동 훈*, 오 왕 록°

Optimization of 16-QAM Constellation for Binary Polar Codes

Arim Lee*, Donghoon Kang*, Wangrok Oh°

요 약

극 부호 (polar codes)는 설계 과정에서 부호 비트 (coded bit)가 동일한 신뢰도를 가지는 채널을 통해서 전송된다는 가정하에 설계되지만 이진 (binary) 극 부호와 고차원 변조 (modulation) 방식을 사용하는 시스템에서는 변조 심볼에 매핑되는 위치에 따라 해당 부호 비트의 신뢰도에 차이가 발생한다. 따라서 부호 비트가 동일한 신뢰도의 채널을 통해 전송된다는 가정하에 설계된 기존 극 부호를 고차원 변조 방식과 함께 사용하는 것은 적합하지 않다. 본 논문에서는 이진 극 부호와 16-QAM (quadrature amplitude modulation) 방식을 사용할 경우 성상도 (constellation)를 최적화하여 이진 극 부호와 고차원 변조를 사용하는 시스템의 성능을 개선할 수 있는 기법을 제안한다. 제안하는 기법은 기존 방식과 동일한 복조 (demodulation) 및 복호 (decoding) 방식을 사용할 수 있으며 성능을 개선할 수 있는 장점이 있다.

Key Words : Polar code, High-order modulation

ABSTRACT

In this paper, we proposed a scheme to maximize the performance of binary polar coded higher order modulation systems. In general, polar code is designed under an assumption that coded bits are transmitted through channels having equal reliability. Unfortunately, polar coded bits experience different channel reliabilities when transmitted with high-order modulation schemes. In this paper, we propose a scheme to maximize the performance of binary polar coded high-order modulation systems by optimizing its constellations. The proposed scheme offers a better performance compared to conventional scheme and demodulation and decoding schemes developed for the conventional scheme still can be applied to the proposed scheme.

1. 서 론

극 부호 (polar codes)는 Arikan에 의해 제안된 부호로 이진 입력 이산 무기억 대칭 채널 (binary-input discrete memory-less symmetric channel, BI-DMS)에서 채널 용량을 달성할 수 있다고 증명된 최초의 부

호이다¹⁾. 극 부호는 채널 양극화 (polarization)를 바탕으로 설계되며 양극화된 채널 중 신뢰도가 높은 채널에 정보 비트를 보내고 신뢰도가 낮은 채널에 고정된 비트 (frozen bit)를 전송하여 채널 용량을 달성하는 방식으로 재귀적 구조로 구성되어 낮은 부호화 및 복호 복잡도를 가진다. 극 부호의 설계 방식으로는 바

* First Author : (ORCID:0000-0002-4773-9860) Dept. of Information Communications Eng., Chungnam National University, arim@cnu.ac.kr, 학생회원

° Corresponding Author : (ORCID:0000-0001-8205-5432) Dept. of Information Communications Eng., Chungnam National University, kingrock@cnu.ac.kr, 중신회원

* (ORCID:0000-0001-9293-6532) KEPRI, donghoon@kepco.co.kr

논문번호 : 201806-A-192-RN, Received May 9, 2018; Revised August 1, 2018; Accepted August 1, 2018

타차리아 한계 (Bhattachayya bound)와 가우시안 근사화 (Gaussian approximation) 방식 등이 있으며 이와 같은 설계 방식들을 이용하여 극 부호를 설계할 때는 일반적으로 부호 비트(coded bit)가 전송되는 각각의 채널들이 동일한 신뢰도를 갖는다는 가정이 사용된다.

주파수 효율을 증가시키기 위하여 고차원 변조 (modulation) 방식이 사용되지만 고차원 변조 방식의 경우 부호 비트들이 변조 심볼에 매핑되는 위치에 따라 수신된 부호 비트들의 신뢰도에 차이가 발생한다. 따라서 부호 비트들이 동일한 신뢰도의 채널을 통해 전송된다는 가정하에 설계된 기존 극 부호와 고차원 변조 방식을 사용하는 시스템에서는 극 부호의 성능을 극대화하는데 문제가 발생한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 고차원 변조에 적합한 극 부호를 설계하는 방식과 부호 비트를 최적의 위치에 매핑하는 방식이 제안되었지만 첫 번째 방식의 경우 다양한 변조방식마다 극 부호 설계를 다르게 해야 되며 두 번째 방식 또한 변조 방식마다 최적의 매핑을 찾아야 된다는 단점이있다^{2,3}.

본 논문에서는 이진 (binary) 극 부호와 고차원 변조를 사용하는 시스템에서 성상도 (constellation)를 최적화하여 이진 극 부호를 다양한 변조 방식들과 함께 사용할 수 있는 기법을 제안한다. 제안하는 기법에서는 부호 비트가 변조 심볼에 매핑되는 위치와 상관없이 동일한 상호정보량 (mutual information)을 갖도록 성상도를 설계하고 이를 통하여 성능을 개선한다. 제안하는 기법은 기존에 사용되던 복조 (demodulation) 및 복호 (decoding) 방식을 그대로 사용하면서 이진 극 부호와 일반적인 성상도를 사용하는 시스템 대비 성능을 개선할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 본 논문에서 고려하는 시스템 모델에 대해 설명하고 3장에서 이진 극 부호와 16-QAM (quadrature amplitude modulation)을 사용하는 시스템에서 성상도를 최적화

하는 방법에 대해 제안한다. 제안하는 기법의 성능을 4장에서 확인하고 5장에서 결론을 맺는다.

II. 시스템 모델

본 논문에서 고려하는 시스템 모델은 그림 1과 같다. 그림 1에서 길이가 K 인 정보 비트 $u_k, k=0,1,\dots,K-1$ 는 이진 극 부호 부호기에 의하여 길이가 N 인 부호어 (codeword) $c_k, k=0,1,\dots,N-1$ 로 변환되며 c_k 는 인터리버 (interleaver)를 통과한 후 16-QAM 변조된다. 여기에서 N 은 2의 거듭제곱인 경우를 가정하였다. 변조된 신호 s_k 는 채널을 통해 전송되며 이때 평균이 0이며 차원당 분산은 $N_0/2$ 인 가산성 백색 가우시안 잡음 (additive white Gaussian noise, AWGN) 채널을 가정하였다. 수신된 신호 y_k 를 바탕으로 부호 비트별 로그 우도비 (log likelihood ratio, LLR) 값 $L(c'_k)$ 을 구하며 $L(c'_k)$ 은 디인터리버 (deinterleaver)를 통과한 후 이진 극 부호 복호되어 송신 비트의 추정값 $\hat{u}_k, k=0,1,\dots,K-1$ 을 생성한다.

2.1 극 부호 부호기

극 부호화된 부호 벡터 $\mathbf{c}_0^{N-1} = [c_0, c_2, \dots, c_{N-1}]$ 은 식 (1)과 같이 계산된다.

$$\mathbf{c}_0^{N-1} = \mathbf{u}'_0^{N-1} \mathbf{G}_N. \tag{1}$$

식 (1)에서 생성행렬 (generator matrix) \mathbf{G}_N 은 $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 을 $\log_2 N$ 차 Kronecker power 연산으로 구할 수 있으며^[1] $\mathbf{u}'_0^{N-1} = [u'_0, u'_1, \dots, u'_{N-1}]$ 의 원소들 중 인덱스 $i \in I'$ 인 u'_i 에는 고정된 비트 0이 할당되고 인덱스 $i \in I$ 인 u'_i 에는 입력받은 K 개의 정보

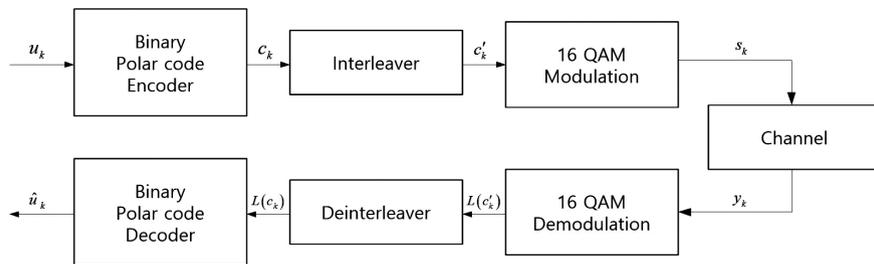


그림 1. 시스템 모델
Fig. 1. system model

비트 $u_i, i=0,1,\dots,K-1$ 가 할당된다. 여기에서 I^r 와 I^s 는 각각 고정된 비트와 정보 비트의 인덱스 집합을 의미하며 이진 극 부호 설계 방식에 따라 결정된다. 본 논문에서는 바타차리야 한계 설계 기법 [4]를 바탕으로 I 와 I^r 인덱스 집합을 구하였다.

2.2 16-QAM 변조기

인터리빙된 부호어 $c'_k, k=0,1,\dots,N-1$ 은 그림 2와 같이 변조 심볼 $s_k = \{s_k^I, s_k^Q\}$ 에 매핑되며 s_k 의 동위상 성분 (In-phase) s_k^I 와 직교위상 성분 (Quadrature) s_k^Q 는 식 (2)처럼 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} s_k^I &= \{c'_{4k}, c'_{4k+1}\} \\ s_k^Q &= \{c'_{4k+2}, c'_{4k+3}\}, k=0,1,\dots,N/4-1. \end{aligned} \quad (2)$$

그림 2에서 a 는 일반적인 경우 1이며 a 값의 위치 변화에 따라 동위상 성분과 직교위상 성분의 MSB (most significant bit)와 LSB (least significant bit)에 매핑된 부호 비트의 신뢰도가 바뀌게 된다. 본 논문에서는 16-QAM과 이진 극 부호를 사용하는 시스템의 성능을 극대화하기 위하여 a 의 위치를 최적화하는 기법을 제안한다.

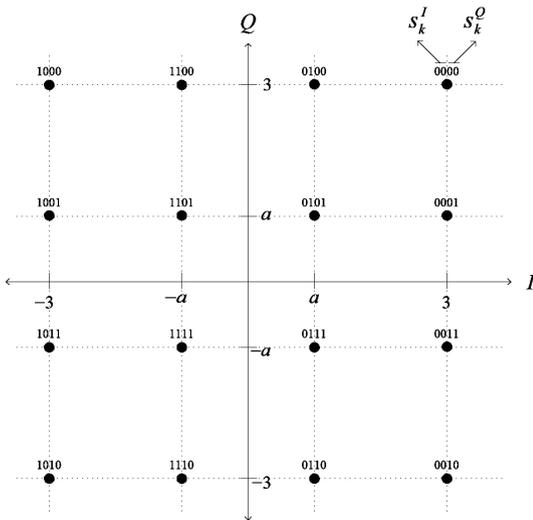


그림 2. 16-QAM 정상도
Fig. 2. 16-QAM constellation

III. 제안하는 기법

16-QAM에서 동위상 성분과 직교위상 성분은 각각

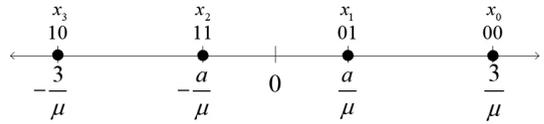


그림 3. 4-PAM 정상도
Fig. 3. 4-PAM constellation

그림 3과 같은 4-PAM (pulse amplitude modulation)으로 표현할 수 있으며 4-PAM 심볼당 평균 에너지를 1로 설정하기 위하여 정규화 인수 (normalization factor) μ 를 사용하였다. 여기에서 μ 는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu = \sqrt{(3^2 + a^2)/2}. \quad (3)$$

일반적인 정상도 ($a=1$)와 비교해보면 $a < 1$ 인 경우에는 MSB에 매핑된 부호 비트의 신뢰도가 감소하며 $a > 1$ 인 경우에는 LSB에 매핑된 부호 비트의 신뢰도가 감소한다. 따라서 a 의 값을 변경하여 MSB와 LSB에 매핑된 부호 비트들의 신뢰도 차이를 조절할 수 있다. MSB와 LSB에 매핑되는 부호 비트들의 상호정보량을 각각 I_M 과 I_L 로 나타내면 두 값의 차이는 식 (4)와 같이 나타낼 수 있으며

$$I_M - I_L = H_L - H_M \quad (4)$$

H_M 과 H_L 은 각각 MSB와 LSB에 매핑된 부호 비트의 조건부 엔트로피 (conditional entropy)를 나타낸다. H_M 과 H_L 은 각각 식 (5) 및 (6)으로 계산하며 여기서 $P(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{N_0}\right)$ 이다. 식 (4)

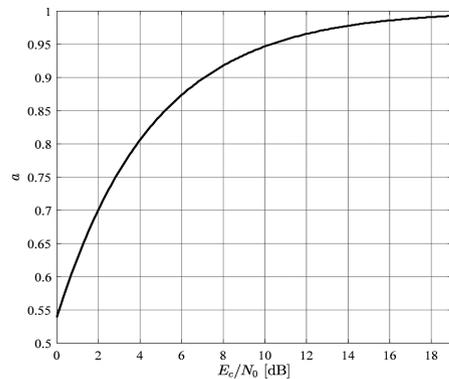


그림 4. E_c/N_0 에 따른 $I_M = I_L$ 을 만족하는 a
Fig. 4. a satisfying $I_M = I_L$ versus E_c/N_0

~ (6)을 이용하여 시스템이 동작하는 신호 대 잡음비 (signal to noise ratio) 영역에 따라 $I_M = I_L$ 이 되는 a 값의 위치를 찾을 수 있다. 그림 4는 부호 비트 에너지 대 잡음비, E_c/N_0 에 따라 $I_M = I_L$ 인 a 의 위치를 나타낸 것이며 여기에서 E_c 는 부호 비트 당 에너지이다. 그림 4에서 확인할 수 있는 바와 같이 높은 E_c/N_0 영역에서는 $a = 1$ 에서 I_M 과 I_L 의 값이 동일하지만 관심 있는 영역에서는 a 값이 1보다 작은 경우에 MSB와 LSB에 매핑된 부호 비트들의 상호정보량이 동일해짐을 알 수 있다.

IV. 전산 실험

본 논문에서는 제안하는 기법의 성능을 확인하기 위해서 $N=1024, 4096$ 인 경우에 대하여 각각 부호율, R 이 1/2 및 1/3인 극 부호와 16-QAM 변조를 사용하는 시스템의 비트오율 성능을 확인하였으며 그 결과는 그림 5, 6과 같다. 극 부호는 바타차리아 설계 방식을 이용하여 설계하였으며 복호 방식으로는 리스트 크기가 4인 CRC (Cyclic Redundancy Check) 연접 복호를 사용하였다⁵⁾.

그림 4를 통해 알 수 있는 바와 같이 일반적인 동작 영역에서는 a 값이 1보다 작은 경우에 MSB와 LSB에 매핑된 부호 비트의 상호 정보량이 동일해진다. 따라서 부호어 길이 및 부호율에 따라 최적의 a 값, a_{opt} 를 찾기 위해서 1보다 작은 경우의 a 값에 따른 비트오율 성능을 확인하였으며 그 결과는 그림 5와 같다. 비트오율 10^{-5} 영역에서의 성능을 극대화하는 a_{opt} 를 찾기 위해서 (N, R) 이 (1024, 1/2), (1024, 2/3), (4096, 1/2), (4096, 2/3)인 경우에 대하여 E_b/N_0 를 각각 5.5, 6.5, 5.0 그리고 6.0 dB로 설정하고 전산 실험을 수행하였으며 여기에서 E_b 는 정보 비트 당 에너지이다. 그림 5에서 볼 수 있는 바와 같이 전산 실험에서 고려한 모든 경우에서 일반적인 성

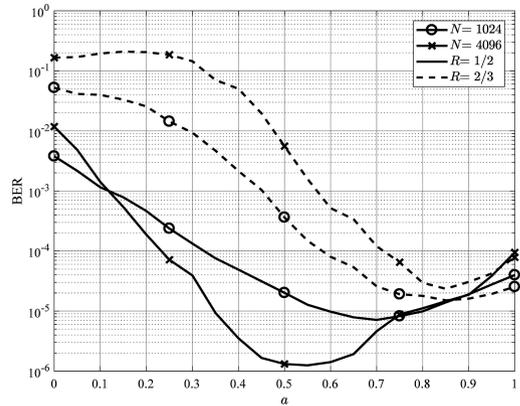


그림 5. a 값에 따른 비트오율 성능 ($N=1024, 4096$)
Fig. 5. BER performances versus a ($N=1024, 4096$)

상도 ($a=1$)를 사용하는 경우에 비하여 $a < 1$ 을 사용하는 경우 성능 개선이 있고 동작하는 E_b/N_0 가 낮아질수록 a_{opt} 가 작은 값을 가지며 이는 그림 4의 결과와 일치하다.

그림 6은 논문에서 제안하는 정상도와 기존 정상도

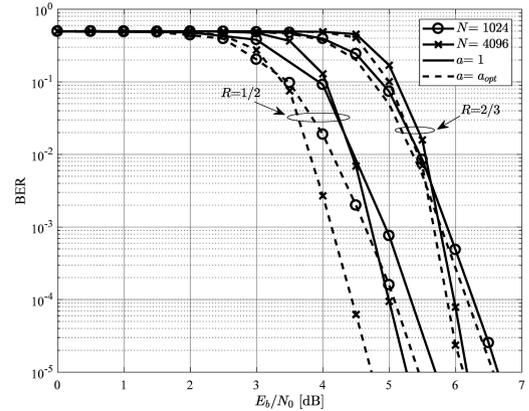


그림 6. 제안하는 기법의 비트오율 성능 ($N=1024, 4096$)
Fig. 6. BER performances of the proposed scheme ($N=1024, 4096$)

$$I_M = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} [P(y|x_0) + P(y|x_1)] \times \log_2 \left[\frac{1}{2} [P(y|x_0) + P(y|x_1)] \right] - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} [P(y|x_3) + P(y|x_2)] \times \log_2 \left[\frac{1}{2} [P(y|x_3) + P(y|x_2)] \right] dy, \quad (5)$$

$$I_L = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} [P(y|x_0) + P(y|x_3)] \times \log_2 \left[\frac{1}{2} [P(y|x_0) + P(y|x_3)] \right] - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} [P(y|x_1) + P(y|x_2)] \times \log_2 \left[\frac{1}{2} [P(y|x_1) + P(y|x_2)] \right] dy, \quad (6)$$

를 사용하는 16-QAM 변조 방식과 이진 극 부호를 연결한 경우의 성능 확인 결과이다. 제안하는 성상도의 경우 a 값은 그림 5에서 도출된 a_{opt} 를 사용하였다. 그림 6에서 볼 수 있는 바와 같이 최적화된 성상도를 사용하였을 경우 일반적인 성상도를 사용하는 경우보다 비트오율 10^{-5} 을 달성하는 영역에서 $R=1/2$ 일 때는 각각 0.25 dB, 0.5 dB의 부호 이득을 얻을 수 있으며 $R=2/3$ 일 때는 각각 0.05 dB의 부호 이득을 얻을 수 있다. 그림 6에서 확인할 수 있는 바와 같이 비트오율 10^{-5} 을 달성하는 E_b/N_0 가 낮을수록 성능 이득이 더 증가하는 것을 확인할 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 이진 극 부호와 16-QAM 변조 방식을 사용하는 시스템의 성능을 극대화하기 위하여 성상도를 최적화하는 기법을 제안하였으며 이를 전산 실험을 통해 확인하였다. 극 부호는 동일한 신뢰도의 채널을 통해 부호 비트가 전송된다는 가정으로 설계되므로 이러한 가정하에서 설계된 이진 극 부호를 고차원 변조와 연결하여 사용할 경우 문제가 발생한다. 기존 기법들의 경우 성상도는 그대로 유지하고 극 부호를 재설계하거나 부호 비트를 성상도에 매핑하는 방법을 조절하는 기법들이 제안되었으나 본 논문에서는 성상도를 최적화하는 방안을 제안하였다. 성상도에 매핑되는 위치에 따른 부호 비트의 신뢰도를 확인하기 위하여 MSB와 LSB에 매핑되는 부호 비트들의 상호정보량을 계산하였으며 이를 통해 일반적인 동작 영역에서는 성상도를 조절하여 성능을 개선할 수 있음을 확인하였다. 제안하는 성상도를 사용하는 경우에도 기존 기법과 동일한 복조 및 복호 기법들을 사용할 수 있으며 제안하는 기법은 16-QAM 뿐만 아니라 고차원 변조 기법을 이진 극 부호와 연결한 시스템에도 동일하게 적용할 수 있다.

References

[1] E. Arıkan, "Channel polarization: a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels," *IEEE Trans. information Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3051-3073, Jul. 2009.

[2] C. I. Ionita, M. Mansour, J. C. Roh, and S. Hosur, "On the design of binary polar codes

for high-order modulation," in *Proc. IEEE Global Commun. Conf.*, pp. 2044-2047, Austin, USA, Dec. 2014.

[3] D. M. Shin, S. C. Lim, and K. Yang, "Mapping selection and code construction for 2^m -ary polar coded modulation," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 16, no. 6, pp. 905-908, Jun. 2012.

[4] I. Tal and A. Vardy, "How to construct polar codes," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 59, no. 10, pp. 6562-6582, Oct. 2013.

[5] K. Niu and K. Chen, "CRC-aided decoding of polar codes," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 16, no. 10, pp. 1668-1671, Oct. 2012.

이 아 립 (Arim Lee)



2017년 2월 : 충남대학교 정보통신공학과 학사
 2017년 3월~현재 : 충남대학교 전파정보통신공학과 석사과정
 <관심분야> 통신시스템 설계 및 구현, 오류정정부호

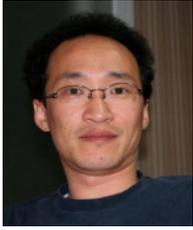
강 동 훈 (Donghoon Kang)



2009년 2월 : 충남대학교 전기정보통신공학부 학사
 2015년 8월 : 충남대학교 정보통신공학과 석박통합과정 박사
 2015년 9월~2018년 6월 : 충남대학교 정보통신연구소 연구원

2018년 6월~현재 : 한국전력공사 전력연구원 일반연구원
 <관심분야> 오류정정부호, 디지털 통신

오 왕 록 (Wangrok Oh)



1994년 2월 : 포항공과대학교 학사

1997년 2월 : 포항공과대학교 석사

2003년 8월 : 포항공과대학교 박사

1997년~2000년 : 포항공과대학

교 정보통신연구소 전임연구원

2003년~2006년 : 포항공과대학

교 정보통신연구소 전임연구원

2006년~2010년 : 충남대학교 정보통신공학과 조교수

2010년~2015년 : 충남대학교 정보통신공학과 부교수

2015년~현재 : 충남대학교 정보통신공학과 교수

<관심분야> 통신시스템 설계 및 구현, 오류정정부호, MIMO 시스템