

Coherence 성질을 이용한 극 희귀 랜덤 투사 기반 효율적 Nystrom 샘플링 기법

윤종수*, 이지은*, 최윤식^o

Very Sparse Random Projection Based Efficient Nystrom Sampling Method Using Coherence Properties

Jongsu Yoon*, Jieun Lee*, Yoonsik Choe^o

요 약

Nystrom 방법은 Symmetric Positive -Semidefinite (SPSD) 행렬의 열들을 균등하게 샘플링하여 SPSPD 행렬의 저-랭크 성분을 예측하는 방법이다. 그러나, 정확한 복원을 위해서는 선택된 열들로 이뤄진 집합의 행렬이 풀-랭크의 성질을 만족해야 하는 강력한 전제조건이 수반되는데, 실제로 이러한 조건을 만족시키는 샘플링 방법을 찾기는 매우 어렵다. 본 논문에서는 원래의 SPSPD 행렬로부터 가능한 한 정보를 많이 가진 열들을 획득하기 위하여 간접적으로 기하학적 Coherence 값을 활용하는 방법을 새롭게 제안하였다. 또한, 제안하는 방법에서는, Coherence 값을 적절한 레벨로 맞추고 이를 통해 성공적인 SPSPD 행렬의 저-랭크 성분 예측을 가능케 하기 위하여 극 희귀 랜덤 투사법을 활용하였다. 결과적으로 제안하는 기법은 기존의 Nystrom 샘플링 방법들에 비하여, 계산량은 현격히 줄고 성능은 one-shot 기법과 같은 최상위 기법에 근접하는 효율적인 기법임을 실험을 통하여 검증하였다.

Key Words : Nystrom method, manifold, coherence, low-rank matrix approximation, sparse random projection, geodesic distance

ABSTRACT

The Nystrom method approximates a low-rank matrix to a Symmetric Positive-Semidefinite (SPSPD) matrix by uniformly sampling from its columns. To guarantee an accurate reconstruction, the strong assumption that the chosen column subset matrix has full-rank should be satisfied. It is very difficult to find a sampling method that satisfies these conditions. In this paper, a novel geometrical measure to calculate coherence is utilized indirectly and this term is related to the possibility of acquiring informative columns from the original SPSPD matrix. The proposed method uses very sparse random projection to adjust the Coherence value to an appropriate level, which enables successful low-rank matrix approximation of the SPSPD matrix. Consequently, comparing with the conventional Nystrom sampling methods, the proposed method is experimentally proved to be efficient in reducing the complexity and close to the best performance method such as one-shot method.

* First Author : Yonsei University School of Electrical and Electronic Engineering, lyjls1@yonsei.ac.kr, 학생회원

^o Corresponding Author : Yonsei University School of Electrical and Electronic Engineering, yschoe@yonsei.ac.kr, 정회원

* Yonsei University School of Electrical and Electronic Engineering, jieun_lee@yonsei.ac.kr

논문번호 : 201911-262-A-RE, Received October 30, 2019; Revised December 3, 2019; Accepted December 3, 2019

I. 서 론

컴퓨터 비전, 자연어 처리, 컴퓨터 생물학 및 기타 분야의 현대 학습 문제는 종종 수만에서 수백만에 이르는 훈련 사례의 대규모 데이터 세트를 기반으로 한다. 그러나 많은 머신 러닝과 데이터 마이닝(커널 릿지 회귀, 커널 부분 공간 추적, 스펙트럼 클러스터링, 기타 커널 기반 기술 등) 방법들에는 대규모 확장성에 대한 온전한 방법론이 없다. 일반적으로 커널 방법은 데이터 요소 쌍, 즉 내부 데이터 간의 내적을 통한 유사성 측정에 의존한다. 따라서, 거대한 크기의 유사성 행렬의 계산 및 저장은 복잡도를 높게 된다. 이러한 사실을 해결하기 위한 커널 방법의 확장성은 대규모 문제에 대한 주요 화두가 되었다. 또한, 오늘날의 빅 데이터 세계에서 이러한 현상은 원래의 고차원 데이터로부터 저차원 구조를 추출하여 계산 복잡도를 낮추는 방식의 차원 축소 알고리즘의 부흥을 일으켰다^[1].

스펙트럼 방법은 차원 축소의 효율성을 높이는 측면에서 개발이 이루어졌는데, 주로 데이터 요소 간의 관계를 인코딩하는 positive definite 커널 행렬의 고유 벡터를 사용하는 방법이다. 일반적으로, 커널 그래프(Gram) 행렬의 고유 벡터는 다양한 스펙트럼 클러스터링 및 매니폴드 학습 알고리즘에서 저차원 매니폴드의 고유 구조를 밝히는 데 도움이 된다. 커널 방법을 가속하는 데 가장 많이 사용되는 방법, 즉 Nystrom 방법은 거대한 커널 행렬의 고윳값 분해를 근사하기 위한 효율적인 방법이다^[2]. 스펙트럼 방법의 장점은 positive definite 행렬의 고유 분해의 많은 연구로 인하여 충분한 이론적 분석을 제공한다는 점이다. 따라서 본 논문에서는 신호 처리의 핵심 부분인 Nystrom 방법으로 알려진^[2] 스펙트럼 분석 및 저-랭크 행렬 복구를 근사화하는 기술을 연구의 대상으로 하였다. Nystrom 방법은 대규모 데이터 세트로 알고리즘을 진행할 때, 저-랭크 근사값을 위한 SPSPD (그램) 행렬의 적은 부분만으로 전체 데이터에 대한 충분한 예측값을 제공한다.

이러한 Nystrom 방법은 refining 분해법과 샘플링 기반 방법 두 가지 방법으로 분류할 수 있다^[3]. Nystrom 방법의 첫 번째 범주는 교차 행렬을 재정의하는 것으로 Nystrom 방법의 재구성 형태로 나타난다^[3]. 샘플링 기반 Nystrom 방법은 원래 커널 그래프 행렬의 적은 열 부분집합에서 추출된 정보를 사용하여 정확한 저-랭크 근사를 달성할 수 있다는 가정을 포함한다^[3]. 그러나 이 가정은 정확히 맞지 않는다. 따라서 coherence 성질^[4]과 중요도 샘플링^[5]을 사용하여 효과

적인 열을 추출하는 기능을 특성화하기 위한 많은 기술이 개발되었다. 그중 그램 행렬로부터 샘플링하기 위해 필요한 열의 수의 하한값을 종래의 coherence 측정치 측면에서 압축 센싱 기법에 기초한 방법이 제안되었다^[4]. CUR 행렬 분해 알고리즘^[5]은 그램 행렬의 우측 특이 벡터로부터 통계적 레버리지 점수를 계산하고 이로부터 높은 점수의 비중있는 열을 추출하는 것을 목표로 한다. 그러나 이러한 레버리지 점수는 저-랭크 행렬 근사 문제에 적용될 때, 그램 행렬의 특정 열에 미치는 영향의 양을 정량화한 다음, 이 값을 중요도 샘플링 분포에 사용하게 되는데, 이때 행렬의 크기가 너무 크면 그램 행렬의 Singular Value Decomposition (SVD)를 계산하는데 문제가 발생한다.

본 논문에서는 이러한 계산 문제를 해결하고 동시에 샘플링된 벡터의 incoherence를 보장하기 위해 랜덤 투사 기반 샘플링 방법이 새로이 제안되었다. 그리고 Nystrom 공식화에 따른 주요 부분 공간의 coherence와 교차 행렬 내의 정보들 간의 관계 정도는 coherence 측정을 위하여 새롭게 제안된 기하학적 geodesic 거리에 의해 분석된다. 또한, 랜덤 프로젝션 방법 중, 본 알고리즘에서는 교차 행렬에서 coherence 레벨을 조정하기 위해 극 회귀 랜덤 투사 방법을 사용하였다. 이를 통해 희소성이 증가하여 근사 오류가 줄어들고 계산 복잡도는 줄어드는 효과를 보인다.

II. Nystrom Method

우선 기본적인 Nystrom 방법에 대해 살펴본다. G 를 $n \times n$ 크기의 주어진 Symmetric Positive Semi-Definite (SPSPD) 행렬이라고 하고, G_k 로 표시된 랭크 $k \ll n$ 의 행렬로 G 를 근사화한다고 가정한다. 저-랭크의 근사값을 얻기 위해, G 의 열 중 $l \ll n$ 인 열을 교체하지 않고 랜덤하게 추출한다. 일반성을 잃지 않으면서, C 를 이러한 샘플링 된 열의 $n \times l$ 행렬로 표현하고, W 를 C 에 대응하는 l 행의 교집합을 포함하는 $l \times l$ 행렬로 표현할 수 있다. 따라서 다음과 같이 G 의 열과 행을 표현할 수 있다.

$$G = \begin{pmatrix} W & G_{21}^T \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \text{ and } C = \begin{pmatrix} W \\ G_{21} \end{pmatrix} \quad (1)$$

계산 시 교차 행렬 W 의 SVD를 사용하여 G 의 고유 분해를 근사한다. SPSPD 커널 행렬 G 의 저-랭크 근사값을 생성하는 Nystrom 방법은 W 및 C 를 사용

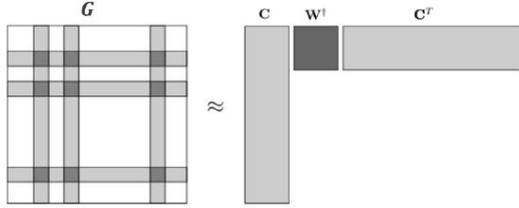


그림 1. 일반적인 Nystrom 방법의 원리
Fig. 1. Principle of the Common Nystrom Method

하여 그림 1과 같고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G \approx \tilde{G} = CW^{-1}C^T \quad (2)$$

교차행렬 W 의 역행렬을 계산할 수 없다면, 의사역행렬(Pseudo inverse)을 사용할 수 있다.

행렬 G 의 특이값과 특이벡터를 근사하기 위해 정확한 고윳값 분해인 $W = U_W \Sigma_W U_W^T$ 을 사용하여 계산한다.

$$\Sigma_{nys} = \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} \Sigma_W, \quad U_{nys} = \sqrt{\frac{1}{n}} C U_W \Sigma_W^{-1} \quad (3)$$

G_k 의 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(l^3 + nlk)$ 로 계산되고, 여기서 l^3 은 W 의 SVD에 대한 값이고, nlk 는 C 에 대한 곱에 대한 값이다.

다음은 coherence에 근거한 분석을 위해서 Nystrom 스펙트럼 복원식을 살펴본다. 식 (3)을 사용하여 Nystrom 스펙트럼 복원식을 다음과 같이 표현할 수 있다⁶⁾.

$$G_k^{nys} = U_{nys,k} \Sigma_{nys,k} U_{nys,k}^T = C W_k^{-1} C^T \quad (4)$$

이 근사값의 정확도는 G_{22} 와 $G_{21} W^{-1} G_{21}^T$ 의 Schur complement에 기반한다.

$$G_l^{nys} = C W^{-1} C^T = \begin{pmatrix} W & G_{21}^T \\ G_{21} & G_{21} W^{-1} G_{21}^T \end{pmatrix} \quad (5)$$

따라서 $k=l$ 일 때 근사값은 G 에서 완벽하게 수행된다. 하지만 이 조건은 강한 조건이기 때문에 이를 위한 고정 분포 기법, 다양한 샘플링 기법 등이 소개되었다⁷⁾.

III. 제안하는 방법

본 논문에서는 계산 복잡성을 줄이고 동시에 샘플링된 부분 공간 사이의 incoherence를 보장하기 위해 새로운 랜덤 투사 기반 Nystrom 스펙트럼 복원식 방법을 제안한다. 이론적 분석을 위해, coherence 측정은 새롭게 제안된 geodesic 거리 측정 방식으로 계산된다. 또한, 계산의 효율성을 높이기 위해 샘플 행렬에 극 희귀 랜덤 투사¹⁰⁾ 방법을 사용한다.

3.1 Coherence 기반 분석

Nystrom 스펙트럼 복원식은 주어진 데이터 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 가 있고 그것의 그램 행렬을 $G = X^T X$ 라 할 때, G 로부터 l 열을 선택하는 0과 1로 이뤄진 샘플링 행렬($S \in \mathbb{R}^{n \times l}$)과 교차행렬로 이루어져 있다. 이때, $W = S^T G S = (XS)^T X S = (X^*)^T X^*$ 로 교차행렬을 정의한다. 이때, $X^* = U_{X^*} \Sigma_{X^*} V_{X^*}^T$ 이고 X^* 의 SVD이다. 그러면 Nystrom 스펙트럼 복원식은 아래와 같이 표현할 수 있다⁶⁾.

$$G_k^{nys} = G S (S^T G S)^{-1} S^T G^T \quad (6)$$

$$= X^T X^* ((X^*)^T X^*)^{-1} (X^*)^T X \quad (7)$$

$$= X^T U_{X^*,k} U_{X^*,k}^T X \quad (8)$$

$U_{X^*,k} U_{X^*,k}^T$ 는 교차 행렬의 상위 k 개의 특이벡터들로부터 이뤄진 영역에 투사하는 역할을 한다. 샘플링된 데이터로부터 확장되는 부분 공간은 랭크 k 를 가지는 그램 행렬의 복원정확도에 영향을 미치는 요소이다. 실제로 $U_{X^*,k}$ 가 그램 행렬 G 의 k 번째까지의 고유 벡터와 유사하게 만드는 것이 목표이다. 또한 G 와 W 의 랭크가 서로 같아야 완벽한 Nystrom 복원이 가능하다³⁾. 하지만 그램 행렬 ($G \in \mathbb{R}^{n \times n}$)로부터 적절한 l 개의 열들을 뽑는 것은 다루기 어려운 조합 문제로 알려져 있다.

다음은 행렬의 coherence와 Nystrom 스펙트럼 복원식과의 관계에 관하여 기술한다. 일반적으로 행렬 $X = U \Sigma V^T$ 의 coherence와 직교 열은 다음과 같이 정의한다³⁾.

$$\mu(X) = \sqrt{n} \max_{i,j} |V_{i,j}| \quad (9)$$

여기서 $V_{i,j}$ 는 V 의 i 번째 행 벡터와 j 번째 열벡터를 나타내고, G 에 대한 부분 공간의 coherence는 열의 정보량의 정량적인 수치를 나타낸다. Nystrom 방법의 성능은 X 에서 선택한 열에 따라 달라진다.

본 논문에서는 일반적인 식 (9)와 달리 geodesic 거리를 간접적인 coherence 측정값으로 사용한다^[8]. 이렇게 하면 행렬의 특이벡터가 표준 기저와 상관되는 정도를 측정하여 coherence를 계산할 수 있고^[3], 표준 기저 행렬과 $X^* = XS$ 의 k 차원의 고유 벡터 사이의 geodesic 거리를 계산할 수 있다^[9]. 또한, geodesic 거리를 평가하기 위해 선행연구^[9]에서의 단계를 따른다. Geodesic 거리가 가까울수록 incoherence가 보장되고, 더욱 정확한 Nystrom 스펙트럼 복원식이 가능해진다. 직관적으로 정보가 행렬의 열에 고르게 분산되어 있으면 복원 성능이 올라간다. 따라서, 다음 문제는 ‘ $U_{X^*,k}$ 에 의해 축소된 공간에 어떻게 낮은 coherence의 열들만 모을 수 있는가?’ 이다. 본 논문에서는 이를 위해 단순한 균일한 샘플링 방법이 아닌 극 희귀 랜덤 투사 방식을 사용하여 투사된 열 기저 벡터에 의해 스캔 된 부분 공간에서의 incoherence 정도를 강화시키는 방법을 제안하였다.

3.2 Very sparse random projection

먼저 원래의 Nystrom 방식을 따르기 위해 균일한 샘플링을 수행한다. 투영된 행렬을 얻기 위하여 교차 행렬 $W \in \mathbb{R}^{l \times l}$ 에 랜덤 프로젝션 행렬을 곱하면 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다^[10].

$$W_P = \frac{1}{\sqrt{k}} WP \in \mathbb{R}^{l \times k}, k \ll l \quad (10)$$

극 희귀 랜덤 투사 행렬 P 는 다음과 같이 정의한다^[10].

$$P_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\eta}, & \text{with prob } \frac{1}{2\eta} \\ 0, & \text{with prob } 1 - \frac{1}{2\eta} \\ -\sqrt{\eta} & \text{with prob } \frac{1}{2\eta} \end{cases} \quad (11)$$

이때, η 는 행렬의 희귀성을 조절하는 변수이다. 선행연구^[10]에 따르면, 극 희귀 랜덤 투사 행렬 P 는 점근적으로 가우시안 분포를 가지므로 분석이 용이하다. 극 희귀 랜덤 투사 행렬 P 는 높은 incoherence를 가

지 때문에 일반적으로 행렬 ϕ 도 마찬가지로 높은 incoherence를 가진다. 또한, 투사 행렬 P 는 U_W (교차 행렬 W 의 고유 벡터)의 직교성을 유지 시킬 뿐 아니라 랭크도 보장해 준다^[11].

$$\begin{aligned} \text{rank}(WP) &= \text{rank}(U_W P) \\ &= \text{rank}(U_W) \\ &= \text{rank}(W) \end{aligned} \quad (12)$$

이러한 점은 기존의 Nystrom 방법의 샘플링 기술들보다 더 incoherence 한 부분 공간을 보장하는 방식이 되고 더 좋은 복원 결과를 얻을 수 있게 된다. 실제로 표 1에서 극 희귀 랜덤 투사 방법을 사용하였을 때 모든 경우에 있어 상대적으로 낮은 coherence, geodesic 거리를 가짐을 볼 수 있다.

표 1. 각 데이터 세트별 Coherence 비교
Table 1. Comparison coherence measures on each dataset

Dataset	Matrix	μ	Geodesic distance
LETTER	W	4.8293	2.0913×10^{-6}
	W_P	2.8106	1.7075×10^{-6}
MNIST	W	6.2121	2.6999×10^{-6}
	W_P	2.509	1.2074×10^{-6}
DEXTER	W	6.2486	1.7075×10^{-6}
	W_P	2.8683	1.1362×10^{-6}

IV. 실험

이 장에서는 제안된 방법의 성능을 탐색하고 다른 연구와 비교하기 위한 실험 결과를 제시한다. 실험은 Intel 3.50GHz CPU, 16GB RAM 및 64 비트 Windows 10 OS를 사용하여 MATLAB R2016a에서 각 실험을 진행하였다. 상대 근사 오차 (상대 오차)라는 측정값을 기반으로 다양한 실험을 수행하였고 상대 오차는 $\frac{\|G - \hat{G}_k\|_F}{\|G\|_F}$ 이다. 본 논문에서는 제안하는 알고리즘의 정확도 및 수행 속도를 타 논문과 비교하기 위해서 실제 데이터 세트 LETTER, MNIST 및 DEXTER를 활용한다. 각 데이터 세트는 20,000개, 60,000개, 2,600개의 인스턴스로 이뤄졌고, 원본 데이터는 각각 16, 784, 20,000의 차원으로 구성되어 있다. LETTER 데이터는 26개의 영어 대문자로 구성되었고, 20개의 다른 폰트가 존재한다. MNIST 데이터 세트 안에는 그레이 스케일에 해상도가 28 by 28인 손

으로 적힌 숫자 영상이 포함됐다. DEXTER 데이터는 문자 분류에 많이 사용되는 것으로서, 문자를 bag-of-words로 표현했다. 실험적으로 복원하고자 하는 행렬의 저차원 랭크값을 9로 설정하였고, 희귀성을 조절하는 변수 η 는 3으로 설정하였으며 이 값은 데이터 특징에 따라 변화될 수 있다. 커널 그래프 행렬 G 는 radial basis 함수를 사용하였고, $g(x_i, x_j)$ 는 다음과 같이 $\exp\left(\frac{-\|x_i - x_j\|_2^2}{2\sigma^2}\right)$ 으로 정의한다. 이때 커널 변수 σ 는 데이터에 따라 달라지고, LETTER에서는 $\sigma=1$, MNIST에서는 $\sigma=5$, DEXTER에서는 $\sigma=100$ 이다. 제안된 방법은 대표적인 Nystrom 방법인 기본적인 Nystrom 방법^[4], 랜덤 SVD를 사용한 Nystrom 방법^[12], one-shot Nystrom 방법^[13]과 비교한다. 주어진 데이터 세트에 대한 정량적 평가로서, G 로부터 선택되는 열들을 30에서 300까지 10배 키운다.

표 2는 다양한 Nystrom 기반 방법의 시간 복잡도를 나타낸다. 기본적인 Nystrom 방법의 동작 시간은 $o(l^3)$ 과 $o(kln)$ 로 구성되어있는데, 첫 번째는 교차 행렬의 SVD를 위한 것이고, 두 번째는 C 의 곱으로 인한 것이다.

그림 2는 LETTER 데이터 세트, 그림 3은 MNIST

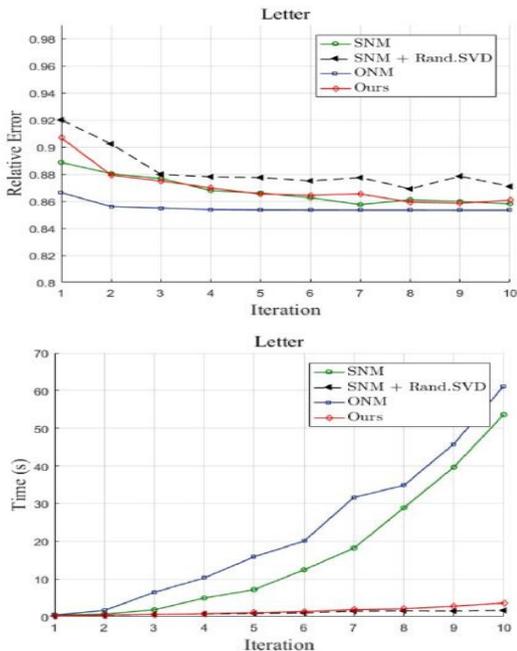


그림 2. LETTER 데이터에 대한 상대 오차(위), 시간(아래) 성능 비교
Fig. 2. Performance comparison of Letter. Relative error(up), Computation time(down)

표 2. 랭크가 k 인 그래프 행렬을 얻기 위한 다양한 Nystrom 기반 방법들의 계산 복잡도
Table 2. Complexities for various Nystrom-based methods to obtain a rank- k approximation

Method	Time complexity
Standard Nystrom ^[4]	$o(l^3 + kln)$
Standard Nystrom with Rand SVD ^[12]	$o(kln)$
One-shot Nystrom ^[13]	$o(l^2n)$
Proposed method	$o(k^3 + kln)$

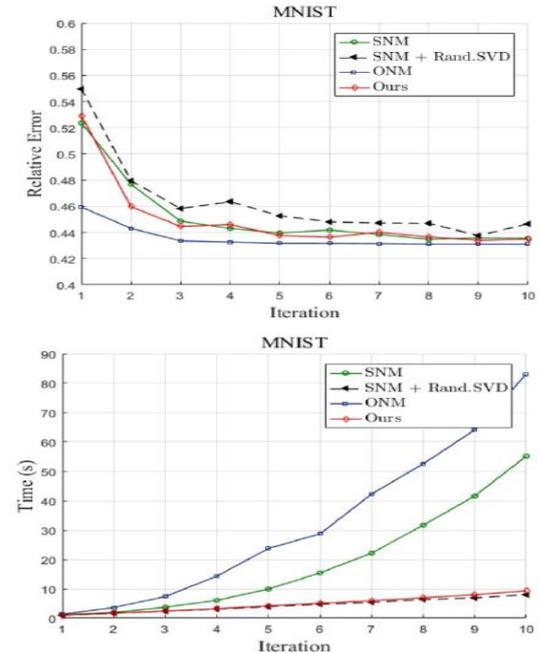


그림 3. MNIST 데이터에 대한 상대 오차(위), 시간(아래) 성능 비교
Fig. 3. Performance comparison of MNIST. Relative error(up), Computation time(down)

데이터 세트, 그림 4는 DEXTER 데이터 세트에 대한 실험결과를 나타낸다. 각 그림에서 위쪽 그림은 상대적 복원 오차, 아래쪽 그림은 계산 복잡도의 실험결과를 나타낸다. 그림 2, 3, 4에서 one-shot Nystrom 방법은 직교성 보존을 위한 추가적인 연산을 하여 성능은 높지만, 계산 복잡도가 높은 경향이 있다. 제안하는 방법은 one-shot Nystrom 방법과 비교하여 성능은 근접한 수준이지만 빠른 속도를 나타낸다.

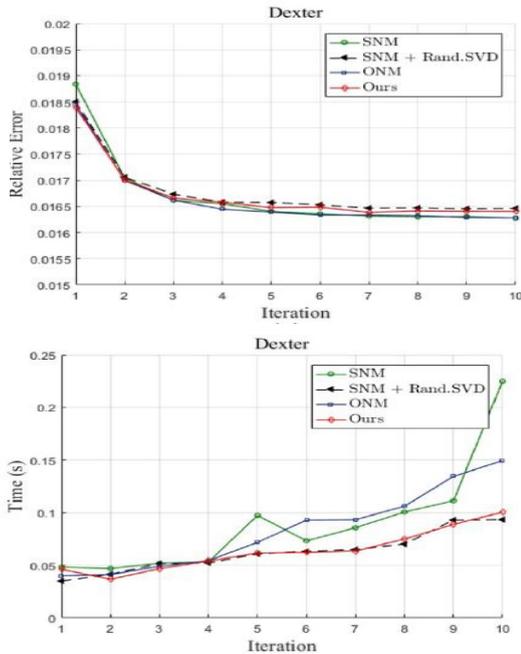


그림 4. DEXTER 데이터에 대한 상대 오차(위), 시간 (아래) 성능 비교
 Fig. 4. Performance comparison of Dexter. Relative error(up), Computation time(down)

V. 결론

본 논문에서는 기존의 반복 기반 샘플링 방법과 비교하여 계산 복잡도를 줄이기 위해 Nystrom 스펙트럼 복원식을 위한 효율적인 극 희귀 랜덤 투사 기반 샘플링방법을 coherence 성질에 기초하여 제안하였다. 결과적으로 Nystrom 스펙트럼 복원식의 성능은 유지되지만, 복잡도는 샘플링된 열의 수와 선형적으로 변경되어 크게 줄어든다. 또한, 극 희귀 랜덤 투사 방식을 일반 랜덤 투사 방식을 대신하여 사용함으로써, 실제로 극 희귀 랜덤 행렬 P 에 의해 적절한 수준의 incoherence는 보장하면서도, 교차 행렬 W 의 희귀성의 증가를 통한 현저한 계산 복잡도 감소 효과를 얻을 수 있었다.

References

[1] N. Arcolano and P. J. Wolfe, "Nyström approximation of Wishart matrices," in *2010 IEEE ICASSP*, pp. 3606-3609, Dallas, TX, USA, Mar. 2010.
 [2] M. Li, J. T. Kwok, and B.-L. Lu, "Making

large-scale Nyström approximation possible," in *ICML 2010 Proc. 27th Int. Conf. Machine Learning*, p. 631, Haifa, Israel, Jun. 2010.

[3] A. Talwalkar and A. Rostami zadeh, "Matrix coherence and the nystrom method(2014)," Retrieved Jun. 1, 2019, from <https://arxiv.org/abs/1408.2044>.
 [4] C. K. Williams and M. Seeger, "Using the Nyström method to speed up kernel machines," in *Advances in Neural Inf. Process. Syst. 13*, MIT Press, 2001.
 [5] M. W. Mahoney and P. Drineas, "CUR matrix decompositions for improved data analysis," in *Proc. National Academy of Sci.*, vol. 106, no. 3, pp. 697-702, Jan. 2009.
 [6] S. Kumar, M. Mohri, and A. Talwalkar, "Sampling techniques for the nystrom method," in *Int. Conf. Artificial Intell. and Statistics 2009*, pp. 304-311, Clearwater Beach, Florida, USA, Apr. 2009.
 [7] W. Lim, R. Du, B. Dai, K. Jung, L. Song, and H. Park, "Multi-scale Nystrom Method," in *Int. Conf. Artificial Intell. and Statistics 2018*, pp. 68-76, Playa Blanca, Lanzarote, Canary Islands, Apr. 2018.
 [8] J. Lee and Y. Choe, "Robust pca based on incoherence with geometrical interpretation," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 27, no. 4, pp. 1939-1950, Jan. 2018.
 [9] P.-A. Absil, A. Edelman, and P. Koev, "On the largest principal angle between random subspaces," *Linear Algebra and its Appl.*, vol. 414, no. 1, pp. 288-294, Apr. 2006.
 [10] P. Li, T. J. Hastie, and K. W. Church, "Very sparse random projections," in *Proc. 12th ACM SIGKDD Int. Conf. Knowledge Discovery and Data Mining*, ACM, pp. 287-296, Philadelphia, PA, USA, Aug. 2006.
 [11] P. Drineas, M. Magdon-Ismail, M. W. Mahoney, and D. P. Woodruff, "Fast approximation of matrix coherence and statistical leverage," *J. Machine Learning Res.*, vol. 13, pp. 3475-3506, Dec. 2012.
 [12] M. Li, W. Bi, J. T. Kwok, and B.-L. Lu, "Large-scale Nystrom kernel matrix

approximation using randomized SVD,” *IEEE Trans. Neural Netw. and Learning Syst.*, vol. 26, no. 1, pp. 152-164, Jan. 2015.

- [13] C. Fowlkes, S. Belongie, F. Chung, and J. Malik, “Spectral grouping using the Nystrom method,” *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell.*, vol. 26, no. 2, pp. 214-225, Feb. 2004.
- [14] J. Lee, J. Yoon, B. Lee, and Y. Choe, “Efficient nystrom method based on coherence properties,” in *Proc. KICS Summer Conf. 2019*, vol. 69, pp. 1251-1252, Jeju Island, Korea, Jun. 2019.

윤 종 수 (Jongsu Yoon)



2014년 8월 : 연세대학교 전기 전자공학과 졸업

2014년 9월~현재 : 연세대학교 전기전자공학과 석·박통합과정

<관심분야> 컴퓨터 비전, 비디오/영상 신호 처리 및 해석

[ORCID:0000-0003-0845-937X]

이 지 은 (Jieun Lee)



2013년 8월 : 강릉원주대학교 전자공학과 졸업

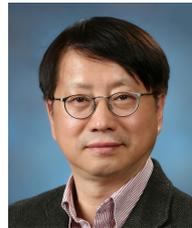
2015년 8월 : 연세대학교 전기 전자공학과 석사 졸업

2015년 9월~현재 : 연세대학교 전기전자공학과 박사과정

<관심분야> 컴퓨터 비전, 비디오/영상 신호 처리 및 해석

[ORCID:0000-0003-0609-4370]

최 윤 식 (Yoonsik Choe)



1979년 2월 : 연세대학교 전기 공학과 졸업

1984년 5월 : Case Western Reserve 대학 시스템공학과 석사

1987년 5월 : Pennsylvania 주립대학 전기전자공학과 석사

1990년 12월 : Purdue 대학 전기공학과 박사

1993년 3월~현재 : 연세대학교 전기전자공학과 교수

<관심분야> 비디오/영상 신호 처리 및 해석, 통계적 영상신호처리

[ORCID:0000-0002-4856-8741]