

# 시간상관 페이딩 채널에서 비 그라스만 차분 코드북 설계

김 영 주<sup>°</sup>

## Non-Grassmannian Differential Codebook Design Over Temporally Correlated Fading Channels

Young-ju Kim<sup>°</sup>

요 약

시간상관이 있는 페이딩 채널에서 비 그라스만 차분 코드북 설계 방법을 두 단계로 제안한다. 제안하는 코드북은  $M$ 진 위상 시프트 키잉 성운을 원소로 가지며,  $k$ 번째 코드북은  $k-1$ 번째 코드북과 제안된 차분코드북의 하다마드 곱으로 업데이트된다. 또한 업데이트되는 코드북은 제안된 코드북과 최소 거리 특성이 항상 일정함을 증명한다. 컴퓨터 시뮬레이션에서 제안된 코드북이 그라스만 코드북보다 성능이 우수함을 확인한다.

**Key Words** : differential codebook, temporally correlated channel, limited feedback

ABSTRACT

Non-Grassmannian differential codebook design methodology is proposed in two steps over temporally correlated fading channels. The  $k$ -th codebook is updated by Hadamard multiplication of  $(k-1)$ -th codebook and the proposed codebook whose elements are  $M$ -PSK constellations. Also, the fact that the updated codebooks have the same minimum distance property with the proposed one, is proved. Computer simulations show that the proposed codebook outperforms the Grassmannian differential codebook.

## I. 서 론

다중 송수신 안테나 시스템의 송신부에서 수신 채널의 정보를 안다면 최대비 전송이 가능하다<sup>1)</sup>. 송신부에 고해상도 채널 정보를 피드백하기 위해서는 무한대의 비트정보가 필요하므로 실제 시스템에 구현하기 어렵다. 그러나 송신부와 수신부가 적당한 크기의 동일한 코드북을 공유하고 채널 정보의 인덱스를 피드백 한다면 매우 적은 비트 수만으로 이론적인 성능에 근접할 수 있다<sup>2-4)</sup>.

본 레터에서는 시간 상관이 있는 무선 채널에서 적은 코드북 크기로 성능을 향상시킬 수 있는 차분코드북의 설계 방법을 제안한다. 일반적으로 코드북의 인자들 사이의 거리를 최소화하는 그라스만 코드북으로 차분 코드북을 구할 수 있다<sup>4-5)</sup>. 동이득 전송에서도 차분 코드북으로 이론적 성능에 근접할 수 있다<sup>6-9)</sup>. 본 레터에서는 동일한 크기의 차분 코드북에서 성능을 더 향상시키는 설계 방법을 두 단계로 제안한다. 컴퓨터 시뮬레이션으로 Step I 에서 구한 그라스만 차분 코드북보다 Step II 에서 구한 비 그라스만 차분 코드북의 성능이 우수함을 보인다. 그리고 기존에 제안된 차분 코드북의 실제 구현 과정에서 차분 코드북의 특성이 변하지 않음을 증명한다.

## II. 시스템 모델

송신 안테나 수가  $N_t$ 개 이고 수신 안테나가 1개인 다중 송수신 안테나 (multiple-input single-output, MISO) 시스템에서,  $N=2^B$ 개의 코드워드를 가지는 코드북  $\Psi_k = \{\mathbf{w}_k^1, \dots, \mathbf{w}_k^N\}$ 을 가정한다. 송신부와 수신부는  $k$ 번째 시간 스텝에서 동일한 코드북  $\Psi_k$ 를 공유한다. 이때,  $\mathbf{w}_k^n \in \mathbb{C}^N, n=1, \dots, N$ 는 코드북  $\Psi_k$ 의  $n$ 번째 코드워드이며,  $\mathbb{C}^a$ 는 원소의 수가  $a$ 개인 복소수 벡터들의 집합이다. 수신부에서 채널 추정을 하여 가장 적합한 코드워드의 인덱스  $n_{opt}$ 를 정한다. 선택된 인덱스  $B$  bits를 송신부로 피드백한다. 송신부에서  $n_{opt}$ 에 해당하는 코드워드  $\mathbf{w}_k^{n_{opt}}$ 를  $\mathbf{w}_k$ 로 놓으면 아래 식과 같이 표현된다.

$$y_k = \sqrt{\rho} \mathbf{h}_k \mathbf{w}_k s_k + n_k \quad (1)$$

<sup>°</sup> First and Corresponding Author : (ORCID:0000-0002-5844-8612) Chungbuk National University School of Information and Communication Engineering, Research Institute for Computer and Information Communication, yjkim@cbnu.ac.kr, 정교수, 종신회원  
논문번호 : 202109-250-A-LU, Received September 24, 2021; Revised October 26, 2021; Accepted October 29, 2021

이때,  $\mathbf{h}_k \in \mathbb{C}^{N_t}$ 는  $k$ 번째 시간 스텝에서 복소수 채널 벡터를 의미하고 평균이 0이고 분산이 1인 복소수 정규분포를 가진다.  $n_k$ 는 가산성 백색 잡음 (AWGN)으로 신호의 신호대 잡음비 (signal-to-noise ratio, SNR),  $\rho$ 에 따라 분산이 정해지는 복소수 정규분포를 갖는다.  $y_k$ 는 수신된 신호이다. 시간상관 채널은 다음과 같이 1차 가우스-마르코프 과정으로 모델링한다.

$$\mathbf{h}_k = \epsilon \mathbf{h}_{k-1} + \sqrt{1 - \epsilon^2} \mathbf{g}_k \quad (2)$$

이때,  $\mathbf{g}_k \in \mathbb{C}^{N_t}$ 는  $\mathbf{h}_k$ ,  $l = 1, \dots, k-1$ 과 독립인 이노베이션 과정으로 평균이 0이고 분산이 1인 복소수 정규분포를 갖는다. 시간상관 계수  $\epsilon$  ( $0 \leq \epsilon \leq 1$ )는 이전 채널 벡터와 시간상관 정도를 나타낸다.

### III. 비 그라스만 차분 코드북 설계

식 (1)의  $\mathbf{w}_k$ 는 송신 빔포머 혹은 사전 부호기라고 불리는 계수이다. 이 값은 최대비율 전송 (MRT)<sup>[6]</sup>에서 구해질 때 가장 우수한 성능을 보인다. 그러나 송신 신호의 피크와 평균 전력의 비율이 매우 증가하는 문제가 있다. 본 레터에서는 항상 일정한 신호의 크기로 전송할 수 있는 동이득 전송 (EGT)을 가정한다<sup>[7]</sup>. 따라서  $\mathbf{w}_k$ 는 아래의 집합,  $\Omega$ 에서 얻어진다.

$$\Omega = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N_t}}, \frac{1}{\sqrt{N_t}} e^{j2\pi/M}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N_t}} e^{j2\pi(M-1)/M} \right\} \quad (3)$$

이때,  $M$ 은 PSK 성운의 수를 의미한다. 차분 코드북은 아래와 같이 구성된다.

$$W_{diff} = \{\mathbf{w}_{diff}^1, \dots, \mathbf{w}_{diff}^N\} \quad (4)$$

이때,  $N$ 은 2의 멱수로 설정하여 최적의 비트 수를 피드백 할 수 있도록 한다. 식 (4)의 각 원소는 식 (3)에서 선택된  $N_t$  개 복소수로 이루어진 벡터이다. 송신부와 수신부는 동시에 차분 코드북을 아래의 식을 이용하여 업데이트한다.

$$W_k = \sqrt{N_t} \langle W_{diff} \cdot \mathbf{w}_{k-1}^{n_{st}} \rangle \quad (5)$$

이때,  $\langle \cdot \rangle$ 는  $\mathbf{w}_{k-1}^{n_{st}}$ 를  $W_{diff}$ 의 각 코드워드와 하다마드 곱을 하는 연산자이다.

**정의 I** (해상도). 코드워드 알파벳으로  $M$ -PSK가 사용될 때,  $M$ 을 코드북의 해상도로 정의한다. ■

일반적으로  $N < M^N$ 이며, 느린 페이딩을 가정하므로  $W_{diff}$ 에 모든 인수가  $1/\sqrt{N_t}$ 인 코드워드가 항상 있다. 위 조건들 아래 최적의 차분 코드북을 설계하도록 한다. 해상도  $M$ 이 증가할수록 더 많은 후보 코드북을 탐색해야 하므로 코드북 탐색을 효율적으로 하기 위해 해상도를 한정한다.

**Step I** : 그라스만 라인 패킹 또는 랜덤 벡터 양자화를 이용하여 차분 코드북  $W_{diff}$ 를 구하고, 최적 해상도  $M$ 을 구한다.

**Step II** : 결정된  $M$ 과 알파벳을 가지고 채널 용량,  $C_k$ 를 최대화 하는 차분 코드북을 탐색한다.

$$C_k = \log_2 \left( 1 + \rho \|\mathbf{h}_k \mathbf{w}_k^1\|_2^2 \right), \quad 1 \leq n \leq N \quad (6)$$

Step I에서 그라스만 코드북과 해상도를 구하고, 코드북 성능은 채널 용량으로 측정되므로 Step II에서 더 우수한 코드북을 찾게 된다. 그런데 Step II에서 얻어지는 코드북은 최소 코델 (chordal) 거리가 Step I의 코드북보다 작게 된다. 즉, Step II에서 제안하는 최적의 차분 코드북은 비 그라스만 코드북이 된다.

다음은 식 (5)의 업데이트에서 코드북의 최소 코델 거리는 불변한가에 대해 고찰한다. 차분 코드북은 매 시간 스텝에서 새로운 코드북으로 업데이트가 되는데 아래와 같은 행렬  $V_{k-1}$ 을 정의한다.

$$V_{k-1} = \prod_{\tau=0}^{k-1} \text{diag}(\mathbf{w}_\tau^{n_{st}(\tau)}) \quad (7)$$

식 (5)에서 선택되는 벡터들의 하다마드 곱을 식 (7)에서 행렬로 표현된다. 다음의 정리에서  $W_{diff}$ 와  $W_k$ 의 코델 거리가 항상 일정하게 유지됨을 증명한다.

**정리 I** (코델 거리 불변의 성질).  $W_{diff}$ 는 차분 코드북이고  $W_k$ 는 시간 스텝  $k$ 에서 업데이트되는 코드북이다.  $W_{diff}$ 의 코델 거리는  $W_k$ 의 코델 거리와 항상 동일하다.

**증명** :  $W_{diff}$ 와  $W_k$ 의 코델 거리  $d(\cdot)$ 를 구하면<sup>[2-3]</sup>,

$$d(W_{diff}) = \min_{n \neq l} \sqrt{1 - |(\mathbf{w}_{diff}^n)^H \mathbf{w}_{diff}^l|^2}, \quad (8)$$

$$d(W_k) = \min_{n \neq l} \sqrt{1 - |(V_{k-1} \mathbf{w}_{diff}^n)^H V_{k-1} \mathbf{w}_{diff}^l|^2}. \quad (9)$$

이때, 식 (7)에서  $V_{k-1}$ 는 유니타리 행렬이므로,

$$\begin{aligned} & (V_{k-1} \mathbf{w}_{diff}^n)^H V_{k-1} \mathbf{w}_{diff}^l \\ &= (\mathbf{w}_{diff}^n)^H V_{k-1}^H V_{k-1} \mathbf{w}_{diff}^l \\ &= (\mathbf{w}_{diff}^n)^H \mathbf{w}_{diff}^l \end{aligned} \quad (10)$$

그러므로,  $d(W_{diff})=d(W_k)$ 이다. 이때,  $n \neq l$ 이다. ■

#### IV. 컴퓨터 시뮬레이션 및 결론

제안하는 그라스만 코드북과 비 그라스만 코드북의 성능을 비교하기 위해 송신 안테나 수  $N_t$ 는 4, 수신 안테나 수는 1이라고 가정한다. 몬테카를로 시뮬레이션은 100만회 이상 반복 실시한다. 시간 상관 채널은 가우스 마르코프 과정으로 구현하며, 반송 주파수 2.5 GHz에서 3km/h의 속도로 단말기가 이동한다고 할 때  $\epsilon = 0.988$ 이 된다. 단말기에서 피드백 신호의 에러 및 지연은 없다고 가정한다. 채널 추정 및 동기화는 완벽하며 다중 송신 안테나 사이의 공간 상관은 없다고 가정한다. 신호 대 잡음비는 10dB로 한다. 정의 I의 해상도  $M$ 은 32로 한다. 표 1과 같이 32-PSK 성운에서 구한 Step I 코드북에서 코델 거리는 0.5531이다. Step II 코드북에서 채널 용량은 그림 1과 같이 향상되고 오히려 최소 코델 거리는 0.3395로 작아진다. 따라서 비 그라스만 코드북이 됨을 알 수 있다.

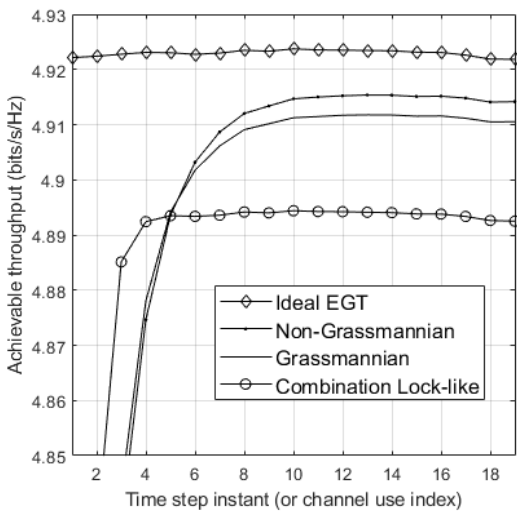


그림 1.  $(N_t, N_r)=(4,1)$ 인 다중 송신 안테나 시스템에서 제안하는 차분 코드북에 따른 채널 용량 성능.  
Fig. 1. Achievable throughput performance of the proposed differential codebook schemes when  $(N_t, N_r)=(4,1)$ .

표 1. 제안하는 차분 코드북.  
Table 1. Proposed differential codebooks.

Index	Step I. 그라스만 코드북	Step II. 비 그라스만 코드북
1	[1 1 1 1]	[1 1 1 1]
2	[1 1 $e^{j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ ]	[1 $e^{-j\pi/16}$ $e^{j\pi/16}$ 1]
3	[1 $e^{j\pi/8}$ 1 $e^{-j\pi/8}$ ]	[1 $e^{j\pi/16}$ $e^{-j\pi/16}$ 1]
4	[1 1 $e^{j\pi/8}$ $e^{-j\pi/16}$ ]	[1 1 $e^{-j\pi/8}$ $e^{j\pi/16}$ ]
5	[1 $e^{j\pi/16}$ $e^{-j\pi/16}$ 1]	[1 1 $e^{-j\pi/16}$ $e^{-j\pi/8}$ ]
6	[1 1 $e^{j\pi/16}$ $e^{j\pi/8}$ ]	[1 $e^{-j\pi/16}$ 1 $e^{-j\pi/8}$ ]
7	[1 $e^{j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ 1]	[1 $e^{-j\pi/8}$ 1 $e^{j\pi/16}$ ]
8	[1 $e^{-j\pi/16}$ $e^{-j\pi/16}$ $e^{-j\pi/8}$ ]	[1 $e^{j\pi/8}$ 1 $e^{-j\pi/8}$ ]
9	[1 $e^{j\pi/8}$ $e^{j\pi/8}$ 1]	[1 $e^{j\pi/16}$ $e^{j\pi/8}$ $e^{j\pi/16}$ ]
10	[1 $e^{-j\pi/16}$ $e^{j\pi/16}$ $e^{-j\pi/16}$ ]	[1 $e^{-j\pi/16}$ $e^{-j\pi/16}$ $e^{j\pi/8}$ ]
11	[1 $e^{j-\pi/8}$ 1 $e^{j\pi/16}$ ]	[1 $e^{j\pi/8}$ $e^{j\pi/16}$ $e^{j\pi/8}$ ]
12	[1 $e^{j-\pi/8}$ $e^{j-\pi/8}$ $e^{-j\pi/16}$ ]	[1 $e^{j\pi/8}$ $e^{j\pi/8}$ $e^{j\pi/16}$ ]
13	[1 1 $e^{-j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ ]	[1 $e^{-j\pi/16}$ $e^{j\pi/8}$ $e^{j\pi/8}$ ]
14	[1 $e^{j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ ]	[1 $e^{-j\pi/8}$ $e^{j\pi/16}$ $e^{-j\pi/8}$ ]
15	[1 $e^{-j\pi/16}$ $e^{-j\pi/8}$ $e^{j\pi/16}$ ]	[1 $e^{j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ $e^{j\pi/8}$ ]
16	[1 $e^{j\pi/16}$ $e^{-j\pi/8}$ $e^{j\pi/16}$ ]	[1 $e^{-j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ $e^{-j\pi/8}$ ]
	최소 코델거리 = 0.5531	최소 코델거리 = 0.3395

#### References

- [1] T. K. Y. Lo, "Maximum ratio transmission," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, no. 10, pp. 1458-1461, Oct. 1999.
- [2] D. J. Love, R. W. Heath Jr., and T. Strohmer, "Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2735-2747, Oct. 2003.
- [3] D. J. Love and R. W. Heath Jr., "Equal gain transmission in multiple-input multiple-output wireless systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 7, pp. 1102-1110, Jul. 2003.
- [4] C. K. Au-Yeung and D. J. Love, "On the performance of random vector quantization limited feedback beamforming in a MISO system," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 6, no. 2, pp. 458-462, 2007.
- [5] T. Kim, D. J. Love, and B. Clercks, "MIMO systems with limited rate differential feedback in slowly varying channels," *IEEE Trans.*

- Commun.*, vol. 59, no. 4, pp. 1175-1189, 2011.
- [6] Y. J. Kim, X. Li, T. Kim, and D. J. Love, "Combination lock-like differential codebook for temporally correlated channels," *Electron. Lett.*, vol. 48, no. 1, pp. 45-47, Jan. 2012.
- [7] N. Y. Park and Y. J. Kim, "Performance analysis of dual-layer differential precoding technique using 8-PSK constellation," *J. KICS*, vol. 38A, no. 5, pp. 401-408, May 2013.
- [8] Y. J. Kim and C. W. Seo, "An adaptive equal gain differential transmission using M-PSK constellations," *J. IEIE*, vol. 53, no. 3, pp. 332-339, Mar. 2016.
- [9] Y. J. Kim, "A single-layer differential codebook design over pedestrian closed-loop MISO system," *JBE*, vol. 24, no. 4, pp. 1-10, 2019.