

Rank-1 행렬 갱신 기반 QR-MMSE 반복 등화기

팽 대원*, 박 상준^o

QR-MMSE Iterative Equalizer Based on Rank-1 Matrix Update

Daewon Paeng*, Sangjoon Park^o

요 약

본 논문에서는 Rank-1 행렬 갱신 기반의 저복잡도 QR-MMSE 반복 등화기를 제안한다. 제안 기법에서는 이전 심볼의 검출 과정에서 계산된 역행렬로부터 다음 심볼의 검출에 필요한 역행렬을 계산하며, 이 과정에서 Rank-1 행렬 갱신 방법을 적용하여 기존 QR-MMSE 반복 등화기 대비 검출 성능의 저하 없이 동일한 역행렬을 산출한다. 이 때 QR-MMSE 반복 등화기의 유효 채널 행렬은 상삼각 행렬로 제안 기법의 Rank-1 갱신 과정은 0 원소가 존재하는 유효 채널 행렬의 열벡터들을 활용하여 연산량을 크게 절감할 수 있다. 모의실험 결과 제안 기법은 기존 MMSE 반복 등화기 및 QR-MMSE 반복 등화기와 동일한 오류 성능을 달성할 수 있음을 확인하였다.

Key Words : MIMO, MMSE, Iterative Equalizer, QR Decomposition, Rank-1 Matrix Update

ABSTRACT

In this letter, we propose a low complexity QR-MMSE iterative equalizer based on the rank-1 matrix update. To reduce the complexity of the QR-MMSE iterative equalizer, the proposed scheme calculates the inverse matrix for the MMSE filter of the current symbol from that of the previous symbol, where the rank-1 matrix update is utilized during the

calculation procedure. Because the effective channel matrix of the QR-MMSE iterative equalizer is an upper triangular matrix, the rank-1 matrix update of the proposed scheme can greatly reduce the complexity by utilizing column vectors of the effective channel matrix having zero elements. Simulation results show that the proposed scheme can achieve the identical error performance to the conventional MMSE and QR-MMSE iterative equalizers.

1. 서 론

MMSE (Minimum Mean-Square-Error) 기반 반복 등화기는 복수의 안테나를 사용하는 MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 시스템에서 준최적 검출 성능을 달성할 수 있으나, 송수신 안테나 수가 증가함에 따라 크게 높은 연산량을 요구할 수 있다.^[1,2] 이러한 MMSE 반복 등화기의 연산량을 개선하기 위해 QR 분해 기반 MMSE 반복 등화기가 제안된 바 있다.^[3] 이는 QR 분해에 기반을 둔 선형 변환을 적용하여 일반적인 MMSE 반복 등화기 대비 수신 안테나 수가 증가할수록 연산량을 감소시킬 수 있다. 하지만 해당 기법 또한 매 반복 과정에서 송신 안테나 수만큼의 역행렬 연산 횟수를 필요로 하여 매우 높은 연산량을 요구할 수 있다.

따라서 역행렬 연산에 따른 연산량 부담의 감소를 위해, 본 논문에서는 Rank-1 갱신 기반 저복잡도 QR-MMSE 반복 등화기를 제안한다. 제안 기법에서는 특정 송신 심볼의 검출 과정에서 필요한 역행렬을 직접 계산하는 대신, Rank-1 행렬 갱신 방식을 적용하여 이전 심볼을 위해 계산된 역행렬로부터 다음 심볼에 필요한 역행렬을 계산한다. 이 때 QR 분해를 통한 선형 변환 이후의 유효 채널 행렬은 0 원소들이 존재하는 상삼각 (upper-triangular) 행렬이므로, 이러한 0 원소들을 반영한 Rank-1 행렬 갱신 과정은 통상적인 역행렬 연산 및 Rank-1 행렬 갱신 대비 크게 낮은 연산량을 요구하게 된다. 또한 이러한 역행렬 갱신 과정에서 근사화가 적용되지 않으므로, 제안 기법은 일반적인 MMSE 등화기 및 QR-MMSE 등화기와 동일한

* 이 논문은 2019년도 과학기술정보통신부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. NRF-2019R1C1C1003202).

• First Author : Kyonggi University, Department of Electronic Engineering, fora22@naver.com, 학사과정, 학생회원

^o Corresponding Author : (ORCID:0000-0002-6684-9803) Kyonggi University, Department of Electronic Engineering, sj.park@kgu.ac.kr, 조교수, 정회원

논문번호 : 202112-340-A-LU, Received December 23, 2021; Revised December 29, 2021; Accepted January 5, 2022

오류 성능을 달성할 수 있다.

II. 시스템 모델

본 논문에서는 송수신 안테나의 수가 각각 N 및 $M(\geq N)$ 인 공간 다중화 MIMO 시스템을 고려한다. 송신단에서는 $N \times 1$ 송신 신호 벡터 $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_N]^T$ 를 전송하며, 이 때 각 s_n 은 $n(1 \leq n \leq N)$ 번째 송신 안테나에서 전송되는 변조 심볼을 나타낸다. 이 때 \mathbf{s} 의 전송에 따른 MIMO 시스템의 입출력 관계식은 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

식 (1)에서 \mathbf{r} 은 $M \times 1$ 수신 신호 벡터이며 \mathbf{H} 는 송수신단 안테나 사이의 채널을 나타내는 $M \times N$ 행렬을 나타낸다. 또한 \mathbf{n} 은 $M \times 1$ AWGN (Additive White Gaussian Noise) 벡터로 각 원소들은 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 가우시안 랜덤 변수로 나타난다.

III. 제안 Rank-1 행렬 갱신 기반 저복잡도 QR-MMSE 등화기

제안 기법의 소개에 앞서 먼저 기존 QR-MMSE 반복 등화기를 간략히 소개한다. QR-MMSE 반복 등화기에서는 먼저 \mathbf{H} 에 대한 QR 분해를 수행하여 $M \times M$ 유니타리 (unitary) 행렬 \mathbf{Q} 를 구한 후, \mathbf{Q}^H 를 식 (1)의 각 항의 왼쪽에 곱하여 다음과 같은 선형 변환된 시스템 모델을 구한다.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{s} + \mathbf{n}' \quad (2)$$

식 (2)에서 \mathbf{r}' 및 \mathbf{n}' 은 $N \times 1$ 벡터로 선형 변환된 시스템 모델에서의 유효 수신 신호 벡터 및 유효 잡음 벡터를 나타내며, 이 때 선형 변환 과정에서 나타난 0 행렬에 해당하는 부분은 생략되었다. 또한 \mathbf{R} 은 \mathbf{H} 에 대한 QR 분해를 통해 얻어진 $N \times N$ 상삼각 행렬로 선형 변환 시스템 모델의 유효 채널에 해당하며, n 번째 열 \mathbf{r}_n 은 $(n+1)$ 번째부터 N 번째 원소까지 모두 0을 갖는다.

이러한 선형 변환을 통해, 식 (1)에서의 주어진 정보 $\{\mathbf{r}, \mathbf{H}, \sigma^2\}$ 을 기반으로 송신 심볼 벡터 \mathbf{s} 를 추정하는 문제는 식 (2)의 $\{\mathbf{r}', \mathbf{R}, \sigma^2\}$ 을 기반으로 \mathbf{s} 를 추정하는 문제로 변환된다. 따라서 식 (2)에 기반을 둔

QR-MMSE 반복 등화기는 주어진 반복 과정에서 $s_n(1 \leq n \leq N)$ 의 검출을 위한 MMSE 필터인 $1 \times N$ 벡터 \mathbf{f}_n 을 다음과 같이 계산한다.

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{r}_n^H \mathbf{F}_n^{-1} = \mathbf{r}_n^H (\mathbf{R} \mathbf{D}_n \mathbf{R}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)^{-1} \quad (3)$$

식 (3)에서 \mathbf{D}_n 은 $N \times N$ 대각 (diagonal) 행렬로 n' 번째 주대각 원소가 $s_{n'}$ ($n' \neq n$)들의 추정 분산치이며 n 번째 주대각 원소는 1이다. 또한 \mathbf{I}_N 은 $N \times N$ 단위 (identity) 행렬이며, \mathbf{F}_n^{-1} 은 MMSE 필터 \mathbf{f}_n 을 계산하기 위해 요구되는 역행렬로 $\mathbf{F}_n = (\mathbf{R} \mathbf{D}_n \mathbf{R}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ 이다.

이러한 기존 QR-MMSE 반복 등화기는 일반적인 MMSE 반복 등화기의 MMSE 필터 계산과정에서 요구되는 $M \times M$ 행렬의 역행렬 연산을 $N \times N$ 행렬의 역행렬 연산으로 바꾸어 수신 안테나 수 M 이 송신 안테나 수 N 이상인 공간 다중화 MIMO 시스템에서 연산량을 절감할 수 있다. 또한 QR 분해를 통한 선형 변환은 잡음 전력을 유지하므로 기존 MMSE 반복 등화기와 동일한 성능을 달성할 수 있다.^[3] 하지만, \mathbf{F}_n^{-1} 의 계산 과정에서 $N \times N$ 행렬의 역행렬이 그대로 수행되므로 N 이 증가할 때 여전히 높은 연산량을 요구할 수 있다.

이러한 기존 QR-MMSE 반복 등화기의 역행렬 과정에서의 연산량을 보다 절감하기 위해, 본 논문에서는 Sherman-Morrison-Woodbury 식을 이용하여 이전 심볼 s_n 을 위한 \mathbf{F}_n^{-1} 으로부터 다음 심볼 s_j 를 위한 \mathbf{F}_j^{-1} 을 유도하는 방식을 제안한다. 이를 위해 먼저 \mathbf{F}_n 및 \mathbf{F}_j 을 다음과 같이 표현한다.

$$\mathbf{F}_n = \sum_{k=1}^N d_k^n \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_j = \sum_{k=1}^N d_k^j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (5)$$

식 (4) 및 (5)에서 d_k^n 은 대각 행렬 \mathbf{D}_n 의 k 번째 주대각 원소이다. 이 때 \mathbf{D}_n 및 \mathbf{D}_j 에서 n 번째 주대각 원소들 (d_n^n 및 d_n^j) 및 j 번째 주대각 원소들 (d_j^n 및 d_j^j)을 제외한 나머지 주대각 원소들은 동일하며, 또한 d_n^n 및 d_j^j 은 1이다. 따라서 \mathbf{F}_n 및 \mathbf{F}_j 는 다음과 같은 관계

를 갖는다.

$$\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_n = (d_n^j - 1)\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^H + (1 - d_j^n)\mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^H \quad (6)$$

한편, $\mathbf{y}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} \neq -1$ 를 만족하는 벡터 \mathbf{x}, \mathbf{y} 및 역행렬이 존재하는 행렬 \mathbf{A} 에 대한 Rank-1 행렬 갱신 식은 다음과 같이 나타난다.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{x}\mathbf{y}^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^H\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{y}^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}} \quad (7)$$

따라서 제안 기법에서는 다음 식 (8) 및 (9)와 같이 식 (6)에 식 (7)을 두 번 적용하여 \mathbf{F}_n^{-1} 으로부터 \mathbf{F}_j^{-1} 을 계산할 수 있다.

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \mathbf{F}_n^{-1} - \frac{(d_n^j - 1)\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^H \mathbf{F}_n^{-1}}{1 + (d_n^j - 1)\mathbf{r}_n^H \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{r}_n} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_j^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} - \frac{(1 - d_j^n)\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^H \mathbf{A}_n^{-1}}{1 + (1 - d_j^n)\mathbf{r}_j^H \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{r}_j} \quad (9)$$

이 때 식 (8)의 \mathbf{A}_n^{-1} 은 \mathbf{F}_n^{-1} 에서 식 (6)의 $(d_n^j - 1)\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^H$ 만을 고려하여 Rank-1 행렬 갱신을 적용한 행렬로 \mathbf{A}_n^{-1} 으로부터 식 (6)의 $(1 - d_j^n)\mathbf{r}_j \mathbf{r}_j^H$ 을 추가적으로 고려하여 Rank-1 행렬 갱신을 다시 적용할 경우 \mathbf{F}_j^{-1} 을 얻을 수 있다. 이 때 \mathbf{F}_n^{-1} 및 \mathbf{F}_j^{-1} 는 어떤 임의의 켈레진치 (Hermitian) 행렬 및 단위 행렬의 합에 대한 역행렬이므로 항상 Full-Rank 이며, 따라서 \mathbf{A}_n^{-1} 및 \mathbf{F}_j^{-1} 는 d_n^j 및 d_j^n 의 값에 관계없이 항상 존재한다.

즉, 제안 방식은 식 (4)의 표현을 통해 직접적인 역행렬 연산 대신 벡터 단위의 Rank-1 행렬 갱신 과정을 반복하여 \mathbf{F}_j^{-1} 을 구한다. 이 때 이용되는 벡터 \mathbf{r}_n 및 \mathbf{r}_j 는 상삼각 행렬 \mathbf{R} 의 열벡터로 각각 $(N-n)$ 개 및 $(N-j)$ 개의 0 원소를 갖고 있으므로, 이를 통해 제안 방식은 역행렬 계산에 필요한 연산량을 감소시킬 수 있다. 한편, 식 (8) 및 식 (9)를 통한 역행렬 연산에서는 근사화가 적용되지 않았으므로, 제안 기법은 기존 QR-MMSE 반복 등화기의 역행렬 연산과 동일한 결과를 얻는다. 따라서 제안 기법은 오울 및 오류 전파 등의 성능 특성 측면에서 기존 MMSE 및 QR-MMSE 반복 등화기들 대비 보다 낮은 연산량으

로 동일한 특성을 갖는다.

다음으로는 제안 기법의 역행렬 계산에 필요한 구체적인 연산량을 계산한다. \mathbf{r}_n 은 n 개의 non-zero 원소만을 포함하며, 또한 식 (8)에서는 $\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{r}_n$, $\mathbf{r}_n^H \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{r}_n$, $\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^H \mathbf{F}_n^{-1}$ ($= \mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{r}_n (\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{r}_n)^H$)의 연산이 필요하다. 따라서 식 (8)에서 필요한 복소 곱셈의 수는 $N^2 + nN + n$ 이다. 이는 식 (9)에서도 n 을 j 로 치환하여 동일하게 적용되며, 따라서 제안 기법의 한 번의 반복 과정에서 $n=1$ 부터 N 까지 모든 N 개의 심볼에 대한 식 (8) 및 (9)의 역행렬 연산을 위해 필요한 복소 곱셈의 수는 $4N^3 + 2N^2 + N$ 이다. 한편, 가우시안 소거법 (Gaussian elimination)을 가정할 경우 $A \times A$ 행렬에 대한 직접적인 역행렬 연산은 $4A^3/3 - A/3$ 으로 계산되므로, 한 번의 반복 과정에서 기존 MMSE 반복 등화기 및 QR-MMSE 반복 등화기의 모든 N 개의 심볼에 대한 역행렬 계산 시의 복소 곱셈 수는 각각 $4NM^3/3 - NM/3$ 및 $4N^4/3 - N^2/3$ 으로 나타난다. 따라서 제안 방식은 기존 MMSE 및 QR-MMSE 반복 등화기 대비 역행렬 연산 과정을 위한 연산량을 크게 절감할 수 있다. 단 첫 번째 반복 과정에서의 첫 번째 심볼($j=1$)에 대한 역행렬 \mathbf{F}_j^{-1} 계산 시에는 이전에 계산된 역행렬 \mathbf{F}_n^{-1} 이 존재하지 않으므로 이 경우에는 직접 식 (3)을 이용하여 \mathbf{F}_j^{-1} 를 계산하여야 한다. 따라서 제안 기법의 첫 번째 반복 과정에서는 이후 반복 과정 대비 약간 높은 연산량을 요구할 수 있다.

IV. 모의실험 결과 및 결론

먼저 그림 1에서는 기존 MMSE 반복 등화기, QR-MMSE 반복 등화기, 그리고 제안 기법의 한 번의 반복 과정에서 송수신 안테나 수에 따른 역행렬 연산 (\mathbf{F}_j^{-1})시의 복소 곱셈의 수를 나타내고 있다. 앞선 분석에서 나타난 것처럼 제안 방식은 역행렬 연산을 위한 복소 곱셈의 수 측면에서 기존 MMSE 및 QR-MMSE 반복 등화기 대비 낮은 차수를 요구하므로 N 이 커질수록 기존 기법들 대비 상대적으로 보다 많은 연산량 절감 효과를 달성함을 확인할 수 있다. 특히, $N=32$ 에서 $M=N$ 일 때 제안 기법은 기존 기법들 대비 약 9.53%의 복소 곱셈만을 요구하며, $M=2N$ 일 때 기존 MMSE 및 QR-MMSE 반복 등화기 대비 약 1.19% 및 9.53%의 복소 곱셈만을 요구함을 확인할 수 있다.

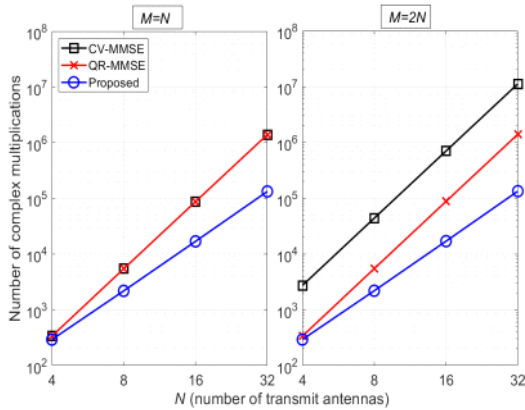


그림 1. 반복 등화기들의 역행렬 연산을 위한 복소 곱셈 수
Fig. 1. Number of complex multiplications for matrix inversion of iterative equalizers

다음으로, 그림 2에서는 기존 MMSE 반복 등화기, QR-MMSE 반복 등화기, 그리고 제안 기법의 송수신 안테나 수 및 반복 과정의 수에 따른 평균 BER (Bit-Error Rate) 성능을 비교하였다. 이 때 각 반복 등화기에서는 심볼 확률 기반의 반복 과정 중단 기법이 적용되었으며 문턱값은 0.9로 설정하였다.^[4] $N=M=16$ 및 $N=M=32$ 인 MIMO 시스템 환경을 고려하였으며, QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) 변조 기법 및 레일리 (Rayleigh) 채널 환경을 고려하였다. 그림 2의 결과를 통해 송수신 안테나 수 및 반복 과정의 수에 상관없이 제안 기법은 기존 MMSE 반복 등화기 및 QR-MMSE 반복 등화기와 동일한 BER 성능을 달성함을 확인할 수 있다.

이와 같이 본 논문에서는 MIMO 시스템에서 QR-MMSE 반복 등화기의 연산량 절감 기법을 제안

하였다. 제안 기법은 기존 QR-MMSE 반복 등화기에서의 상삼각 행렬 구조를 이용한 Rank-1 행렬 갱신을 적용하여 역행렬 계산에 필요한 복소 곱셈의 수를 절감하였다. 이러한 제안 QR-MMSE 반복 등화기의 추가적인 복잡도 절감을 위해 다양한 복잡도 절감 방식들이 적용될 수 있다. 예를 들어, 대규모 MIMO 시스템을 고려하여 근사화된 MMSE 필터 계산식을 역행렬 연산 과정에 반영할 수 있으며, 또한 심볼 그룹 단위 검출 구조를 적용하여 갱신이 필요한 역행렬의 수를 감소시킬 수 있다.^[2,5] 이에 대한 연구는 향후 과제로 남는다.

References

- [1] F. Cao, et al., "On the relation between PDA and MMSE-ISDIC," *IEEE Sign. Process. Lett.*, vol. 14, no. 9, pp. 897-900, Sep. 2007.
- [2] L. Fang, et al., "Low complexity iterative MMSE-PIC detection for medium-size massive MIMO," *IEEE Wirel. Commun. Lett.*, vol. 5, no. 1, pp. 108-111, Feb. 2016.
- [3] D. Paeng, et al., "QR decomposition based MMSE iterative equalizer for MIMO systems," *J. KICS*, vol. 46, no. 8, pp. 1251-1253, Aug. 2021.
- [4] J. Ki, et al., "Low-complexity MMSE-ISDIC with symbol based detection stopping criterion," *J. KICS*, vol. 46, no. 8, pp. 1258-1261, Aug. 2021.
- [5] A. Lim, et al., "Group based MMSE iterative equalizer for MIMO systems," *J. KICS*, vol. 46, no. 6, pp. 937-940, Jun. 2021.

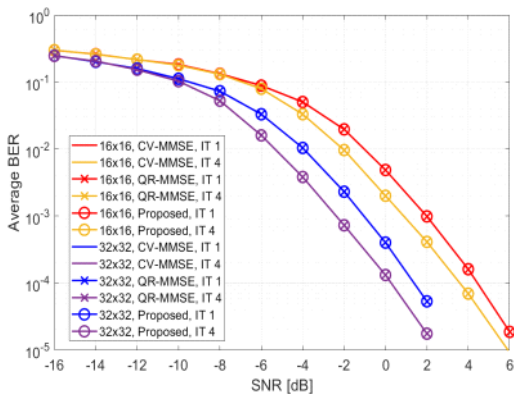


그림 2. 반복 등화기들의 BER 성능 비교
Fig. 2. BER comparisons of iterative equalizers